LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°1$-T- $n°3$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

26/04/2008

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties dépendantes.
La première partie représente une introduction des deux dérnières.
La deuxième et la troisième parties sont extraites du **Concours National Commun-session 2000-MP**.
Elles ont été modifiées pour qu'elles soient adaptées au programme de première année **MPSI**.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

On considère un espace vectoriel E, de dimension $n \geq 2$ sur le corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Si u, $v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté uv ; puis $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id.
On rappelle que $u^0 = Id$ et si $k \in \mathbb{N}^*$; $\quad u^k = u^{k-1}u$.
On note $\mathcal{T} = \{u \in \mathcal{L}(E)/Tr(u) = 0\}$ l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_u(\lambda) = \ker(u - \lambda Id)$, et on définit l'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ (u, v) & \mapsto & [u, v] \end{array}$$

pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi_u : \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & [u, v] \end{array}$$

et pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} \psi_v : \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & [u, v] \end{array}$$

$\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kroneker.
On rappelle que $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

Partie I : Trace d'un endomorphisme.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall j \in [|1, n|]; \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

où $(a_{i,j})$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.
On appelle trace de u, qu'on note $Tr(u)$ le scalaire :

$$Tr(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

On admet que cette définition ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E.

1. **Propriétés de la trace.**

   (a)- Montrer que Tr définit une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.
   (b)- Vérifier que $Tr(Id_E) = n$.
   (c)- Montrer que si f et g sont deux endomorphismes de E, alors $Tr(f \circ g) = Tr(g \circ f)$.
   En déduire que si g est bijectif, alors $Tr(g \circ f \circ g^{-1}) = Tr(f)$.
   (d)- L'application Tr est-elle surjective ? Est-elle injective ? Déterminer son rang.

2. **Trace d'un projecteur.**
   Soit p un projecteur de E, $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de $Im(p)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n)$ une base de de $\ker(p)$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
   (b) En déduire que $Tr(p) = rg(p)$.
   Soit q un autre projecteur de E.
   (c) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si, et seulement si : $p \circ q = q \circ p = 0$.
   (d) Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer en utilisant la question $(I - 2 - b)$ que :

   $$Im(p + q) = Im(p) \oplus Im(q).$$

3. **Trace d'un endomorphisme nilpotent.**
   On suppose dans cette question que l'endomorphisme f de E est nilpotent (non nul), et on pose $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* / f^k = 0\}$.
   (a) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   (b) Montrer que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est libre.
   (c) En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.
   On suppose dans les deux questions suivantes que $p = n$.
   (d) Montrer que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E.
   (e) Montrer que $Tr(f) = 0$.
   (f) Montrer que ce dernier résultat est vrai même si $p < n$.

Partie II : Crochet de Lie.

1. **Quelques propriétés de ϕ_u.**

   (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension.
   (b) Montrer que chacune des applications ϕ_u et ψ_v est linéaire, avec $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
   On dira que l'application ϕ est bilinéaire.
   (c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie.
   c-1) Montrer que $Vect\{Id, u, \ldots, u^{n-1}\} \subset \ker \phi_u$ et que $\dim(\ker \phi_u) \geq 2$.
   c-2) Montrer que si $v \in \ker \phi_u$, alors $v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$ pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (d) d-1) Montrer que $Im(\phi) \subset \mathcal{T}$ et que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $Im(\phi_u) \subset \mathcal{T}$.

d-2) Existe-t-il $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[u, v] = Id$?
Indication : on pourra comparer leur traces.
d-3) Peut-on avoir $Im(\phi_u) = \mathcal{T}$?

(e) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
e-1) Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
e-2) En déduire que $\ker \phi_u = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si u est une homothétie.
e-3) Si u est non nul de trace nulle, est ce que u peut être une homothétie ? Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $(e, u(e))$ soit libre.

(f) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
f-1) Montrer par récurrence sur k que $(\phi_u)^k(v) = \sum\limits_{p=0}^{k} (-1)^p C_k^p u^{k-p} v u^p$.
f-2) En déduire que si u est nilpotent, alors ϕ_u est nilpotent.

2. **Détermination de $Tr(\phi_u)$.**
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E vérifiant :

$$\forall j \in [|1, n|]; \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, on définit l'endomorphisme $u_{i,j}$ de E par :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}; \quad u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i.$$

(a) Démontrer que $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.
(b) Montrer que pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, 2, \ldots, n\}^4$:

$$u_{i,j} u_{k,l} = \delta_{j,k} u_{i,l}.$$

(c) Montrer que :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2; \quad \phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} u_{i,k}.$$

(d) En déduire $Tr(\phi_u)$.

Partie III : Cas particulier.

1. **Endomorphismes diagonalisables.**
Un endomorphisme u de E est dit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et un n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}; \quad u(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Une telle base $\mathcal{B}$ est dite une base de diagonalisation de u.
(a) Vérifier que si u est une homothétie, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
(b) Montrer que si u est une projecteur de E, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
(c) Soit u est une symétrie de E.
c-1) Montrer que $E = E_u(1) \oplus E_u(-1)$.
c-2) Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de $E_u(1)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_n)$ une base de de $E_u(-1)$. Vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de de E.
c-3) En déduire que u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

(d) On suppose jusqu' à la fin de la question (III-2) que $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de diagonalisation de u vérifiant $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}; \quad u(e_i) = \lambda_i e_i$.

d-1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a :

$$u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i.$$

d-2) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a :

$$P(u)(e_i) = P(\lambda_i)e_i.$$

d-3) En déduire que les endomorphismes u^k et $P(u)$ sont diagonalisables sur $\mathbb{K}$.

(e) Montrer que si de plus u est nilpotent alors $u = 0$.
Ainsi, le seul endomorphisme à la fois nilpotent et diagonalisable sur $\mathbb{K}$ est l'endomorphisme nul.

2. **Étude de ϕ_u.**

(a) Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2; \quad \phi_u(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)u_{i,j}.$$

(b) En déduire que ϕ_u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
On suppose de plus que les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts.

(c) Montrer que $\ker \phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E)/\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}; v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)\}$.

(d) En déduire que $\ker \phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_2)) \times \ldots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_n))$.

(e) Quelle est la dimension de $\ker \phi_u$? Quel est le rang de ϕ_u ?

(f) En déduire que $\ker \phi_u = Vect\{Id, u, \ldots, u^{n-1}\}$

3. **Cas où ϕ_u est diagonalisable.**
$u \in \mathcal{L}(E)$ tel que ϕ_u soit diagonalisable et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_{n^2})$ une base de diagonalisation de ϕ_u vérifiant $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n^2\}; \quad \phi_u(v_i) = \beta_i v_i$.
Soient $x \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda x$.

(a) Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de λ, β_i et $v_i(x)$.

(b) Montrer que l'application $\chi : \mathcal{L}(E) \to E\,;\, x \mapsto v(x)$ est linéaire surjective.

(c) Montrer alors que u est diagonalisable.
Cette dernière question est facultative.

4. **Cas où** $\dim(E) = 2$**.**
Supposons que $\dim(E) = 2$ et soit u endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

(a) Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $(e, u(e))$ soit une base de E.

(b) Vérifier l'existence d'un unique couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u^2(e) = ae + bu(e)$.

(c) Montrer que $u^2 = aId + bu$.

(d) En déduire que $\ker \phi_u = Vect\{Id, u\}$.

FIN