LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°2$-T- $n°1$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

24/11/2007

---

Ce devoir suréillé est composé d'un exercice et d'un problème formé de trois parties largement indépendantes.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie, de la clareté et de la rigueur des raisonnements. Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront etre centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

## 1 Exercice.

Ecrire chacun des complexes suivants sous la forme trigonométrique,en précisant son module et son argument :

1. $Z_1 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ et $Z_2 = e^{i\theta} - e^{2i\theta}$.
2. $Z_3 = e^{e^{i\alpha}}$ et $Z_4 = e^{ie^{i\alpha}}$.
3. $Z_5 = \frac{e^{i\alpha}-e^{i\beta}}{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}$.
4. $Z_6 = \frac{1}{1+i\tan\alpha}$.
   où $\theta \in [0, 2\pi[$ ; $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres réels donnés.

## 2 Problème.

# Partie I : Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$.

– Le but de cette partie est de montrer que les seuls sous-groupes finis du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont les groupes des racines nèmes de l'unité.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Notations :**
– Pour $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}^* / z^n = 1\}$$

– On rappelle aussi que

$$\mathbb{U}_n = \{\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in [|0, n-1|]\}$$

1. **Résultats préliminaires.**
   (a)- Vérifier que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe abélien.

(b)- Montrer que l'application $g : [|0, n-1|] \to \mathbb{U}_n\ ;\ k \mapsto g(k) = \xi_k$ est bijective.
(c)- Montrer que si $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n \Leftrightarrow m|n.$$

(d)- Soient :$m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge m = 1$, montrer que :

$$\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \{1\}.$$

(e)- On suppose toujours que $n \wedge m = 1$, prouver que l'application
$h : \mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m \to \mathbb{U}_{nm}\ ;\ (z, z') \mapsto h(z, z') = zz'$ est un isomorphisme de groupes.

2. **Sous-groupes de $(\mathbb{U}_n, \times)$.**
On considère $G$ un sous-groupe (fini) de $(\mathbb{U}_n, \times)$ de cardinal $d$, $a$ un élément de $G$ et $\psi$ l'application définie de $G$ vers $G$ par :

$$\forall x \in G; \quad \psi(x) = ax.$$

(a)- Montrer que $\psi$ est bien définie.
S'agit-il d'un morphisme de groupes ?
(b)- Montrer que $\psi$ est bijective.
(c)- En calculant de deux façons différentes le produit $\prod\limits_{x \in G} (ax)$, montrer que :

$$a^d = 1.$$

(d)- En déduire que $G = \mathbb{U}_d$ et que $d$ divise $n$.
(e)- Décrire tous les sous-groupes de $(\mathbb{U}_n, \times)$.
(f)- Quels sont les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$ ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Remarque :**
En fait, on peut montrer de la meme façon que dans la question 2.(c) précédente que :
si $(G, .)$ est un groupe fini de cardinal $d$ , et d'élément neutre $e$ alors :

$$\forall a \in G; \quad a^d = e.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

3. **Morphismes de groupes de $\mathbb{U}_n$ vers $\mathbb{C}^*$.**
On considère un morphisme de groupes $f$ de $(\mathbb{U}_n, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.
On pose $a = f(\xi_1) = f(e^{\frac{2i\pi}{n}})$.
(a)- Montrer que $a \in \mathbb{U}_n$.
(b)- Décrire tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{U}_n, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.
(c)- Quel est leur nombre ?

4. **Racines nèmes primitives de l'unité.**
On appelle racine nème primitive de l'unité toute racine nème de l'unité $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ telle que $k \in [|0, n-1|]$ et $k \wedge n = 1$.
On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des racines nèmes primitives de l'unité et on note :
$\varphi(n)$ son cardinal [1].
(a)- Déterminer $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$.
(b)- Déterminer $\mathcal{P}_5$, $\mathcal{P}_6$ et $\mathcal{P}_7$.
(c)- Montrer que :

$$\mathcal{P}_{12} = \{e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{-i\pi}{6}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{-5i\pi}{6}}\}.$$

[1] $\varphi(n)$ s'appelle l'indicateur d'Euler, on l'étudiera ultérieurement.

(d)- Calculer $\varphi(n)$ dans chacun des cas précédents.

5. **Etude d'un sous-anneau de $\mathbb{C}$.**
   On rappelle que l'ensemble des entiers de **Gauss** est défini par :
   $$\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} / \quad \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 : \quad z = a + ib\}.$$
   (a)- Vérifier que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau du corps $\mathbb{C}$.
   (b)- Montrer qu'un élément $z$ de $\mathbb{Z}[i]$ est inversible si, et seulement si, $|z| = 1$ .
   (c)- Déterminer alors tous les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.
   (d)- L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est-il intègre ? Est-il un corps ? Donner son corps de fractions.
   (e)- Montrer que :
   $$\forall z \in \mathbb{C}; \exists x \in \mathbb{Z}[i]; \quad |z - x| < 1.$$

# Partie II : Racines 7 èmes de l'unité.

Dans cette partie, $n$ et $r$ sont deux entiers naturels avec $n$ non nul, on pose :

$$I_{n,r} = \{k \in \{0, 1, \ldots, n\} / \quad 7 \textit{ divise } (k - r)\} \quad et \quad S_r = \sum_{k \in I_{n,r}} C_n^k$$

On considère le complexe $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, c'est une racine primitive 7 ème de l'unité.
Le but de cette partie est de majorer la quantité $S_r$.

1. **Sommations utiles.**
   (a) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.
   (b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.
   (c) En déduire que :
   $$\sum_{0 \le 2k \le n} C_n^{2k} = \sum_{0 \le 2k+1 \le n} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}.$$
2. **Calculs intermédiares.**
   (a) Pour tout entier naturel $k$, on pose $\phi(k) = \sum\limits_{p=0}^{6} \omega^{p(k-r)}$.
   Déterminer les valeurs de $\phi(k)$ selon les valeurs de $k$.
   (b) Développer la somme $\sum\limits_{p=0}^{6} (1 + \omega^p)^n \omega^{-pr}$ , puis l'exprimer comme combinaison linéaire de la famille $(\phi(0), \phi(1), \ldots, \phi(n))$.
   (c) En déduire que $\sum\limits_{p=0}^{6} (1 + \omega^p)^n \omega^{-pr} = 7 \sum\limits_{k \in I_{n,r}} C_n^k$.
3. **Calcul de $S_r$.**
   (a) Pour $p \in \{1, 2, 3\}$, écrire le complexe $T_p = (1 + \omega^p)^n \omega^{-pr}$ sous forme trigonométrique.
   (b) En regroupant chaque $T_p$ avec son conjugué, exprimer $\sum\limits_{p=0}^{6} (1 + \omega^p)^n \omega^{-pr}$ comme somme de réels où interviennent les cosinus des multiples de $\alpha = \frac{\pi}{7}$ et $\beta = \frac{(n-2r)\pi}{7}$.
   (c) En déduire une expression de $S_r$.
4. **Cas particulier.**
   On se place ici dans le cas particulier $n = 25$.
   (a) Montrer que $S_1 = S_3$ , $S_0 = S_4$ et $S_5 = S_6$.
   (b) Donner une majoration du type $\left|\frac{7S_r}{2^n} - 1\right| \le M$ ; où $M$ est une constante à déterminer en fonction de $\cos\alpha, \cos 2\alpha$ et $\cos 3\alpha$ .

(c) En déduire un encadrement de $S_r$.

5. **Une équation de degré deux.**
Dans cette question, on pose :
$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad et \quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$
(a) Calculer $A + B$ et $AB$.
(b) Donner une équation $(*)$ de degré deux dont $A$ et $B$ sont solutions.
(c) Montrer que $Im(A) > 0$ et que $Im(B) < 0$.
(d) Déterminer alors $A$ et $B$.
Indicatiion : Résoudre l'équation $(*)$.
(e) Dire pourquoi $A$ et $B$ doivent etre conjugés ?

# Partie III : Sommations et complexes.

Le but de cette partie est de calculer des sommations à l'aide des nombres complexes, en utilisant les formules de Moivre et du binome de Newton.

1. **Questions de cours.**
(a) Montrer par récurrence que pour tout complexe $z \neq 1$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$
(b) Rappeler la formule de **Moivre**.
(c) Rappeler et prouver la formule du binome de **Newton**.
(d) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \xi_k$.
(e) En déduire les valeurs de $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \xi_k$.

2. **Sommations complexes.**
(a) Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \xi_k$.
(b) Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k \xi_k$.
(c) Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k \xi_k$.
(d) Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \xi_k$.
(e) Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \xi_k^p$ ; où $p \in \mathbb{N}$.
Discuter suivant les valeurs de l'entier $p$.

3. **Sommations réelles.**
On considère deux paramètres réels $x$ et $\alpha$.
(a) Calculer les sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx)$.
(b) Calculer les sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx + \alpha)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx + \alpha)$.
(c) Calculer les sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)$.
(d) Calculer les sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx + \alpha)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx + \alpha)$.
(e) Calculer les sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx + (n-k)\alpha)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx + (n-k)\alpha)$.

**FIN**