LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°1$-T- $n°2$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

8/12/2007

Ce devoir suréillé est composé d'un problème formé de trois parties dépendantes.
C'est un sujet du concours : **Centrale-Supélec** pour l'année 2001, filière **PC**.
Il a été modifié pour qu'il soit adapté au programme de première année **MPSI**.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie, de la clareté et de la rigueur des raisonnements. Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront etre centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

Définitions et notations :

- On appelle norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(I)$ des fonctions réelles bornées sur l'intervalle I toute application N définie de $\mathcal{B}(I)$ vers $\mathbb{R}_+$ vérifiant :
  (i) Pour tout élement f de $\mathcal{B}(I)$: $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.
  (ii) Pour tout élement f de $\mathcal{B}(I)$ et tout réel λ : $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
  (iii) Pour tous élements f et g de $\mathcal{B}(I)$: $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.
- Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe des réels $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = b$ tels que , pour tout $i \in [|1,p|]$, la restriction de f à chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ et toutes ses dérivées $f^{(j)}$, avec $1 \leq j \leq k$, admettent des limites finies en x_{i-1} à droite et en x_i à gauche.
- f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle I quelconque si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur chaque segment inclus dans I.
- On rappelle qu'une application f définie sur I est dite bornée par $M > 0$ si :

$$\forall x \in I; \quad |f(x)| \leq M.$$

Partie I : Préliminaires.

1. **Norme sur $\mathcal{B}(I)$.**
   Pour tout élément f de $\mathcal{B}(I)$, on pose :$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$.
   (a)- Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{B}(I)$.
   (b)- Calculer $\|f\|_\infty$ dans chacun des cas suivants :
   (b-1) $I = \mathbb{R}$ et $f = \cos$.
   (b-2) $I = \mathbb{R}$ et $f = \sin$.
   (b-3) $I = \mathbb{R}$ et $f = \sin + \cos$.
   (b-4) A-t-on toujours l'égalité $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$?

(c)- On considère la fonction f_n dépendant du paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Calculer la valeur de $\|f_n\|_\infty$.
Indication : Dresser le tableau de variations de cette fonction.

(d)- On considère la fonction f_n dépendant du paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ définie par : $f_n(x) = x^n \ln x$ si $x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$; calculer la valeur de $\|f_n\|_\infty$.

2. **Etude de quelques exemples.**
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la norme $\|f^{(n)}\|_\infty$ de la dérivée d'ordre n de f, si ça existe, dans chacun des cas suivants :
(a) $I = \mathbb{R}$ et $f = \cos$.
(b) $I = \mathbb{R}$ et $f = \sin$.
(c) $I = \mathbb{R}_+$ et $f : x \mapsto \exp(-x)$.
(d) $I =]-\infty, 0[$ et $f : x \mapsto \frac{-1}{x}$.

3. **Inégalité de Taylor-Lagrange.**
On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I, et on suppose que $f^{(n+1)}$ est bornée par M.
(a) Montrer par récurrence que pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

(b) En déduire que :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel x :

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{x^4}{24}.$$

(d) Montrer que pour tout réel x :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

où M est un majorant de la fonction exponentielle sur le segment $[0,x]$.

(e) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = e^x$.

4. **Résultats utiles.**

(a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k k^j = \begin{cases} 0 & si \quad j \in [|1, m-1|] \\ m! & si \quad\quad j = m \end{cases}$$

(b) Si $(u_k)_{k \geq 1}$ est une suite croissante de réels strictement positifs, et k et n sont deux entiers tels que :$1 \leq k \leq n$, prouver que :

$$(u_1 u_2 \ldots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \ldots u_n)^k.$$

Partie II : Majoration des dérivées successives.

1. **Dérivées premières.**
   Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que f et f" soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_2.
   (a) En écrivant, pour $h > 0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$, puis entre x et $x-h$, à l'ordre un, montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}; \quad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$
   (b) En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}; \quad |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$
   (c) Montrer d'une façon similaire que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3 alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R}; \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}(9M_0^2M_3)^{\frac{1}{3}}.$$
   (d) Si f vérifie les memes hypothèses de la question $(1-c)$ précédente, la fonction f" est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?
2. **Généralisation.**
   Dans toute la suite du problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Soit f une fonction non constante, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n.
   (a) En utilisant la question $(I-4-a)$ des préliminaires ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre x et $x+h$, pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ pour $0 \leq k \leq n$.
   On note alors $M_k = \|f^{(k)}\|_\infty$.
   (c) Montrer que : $M_0 > 0$ et que $M_1 > 0$.
   (d) Montrer que :
   $$\forall k \in [|0, n|]; \quad M_k > 0$$
   .
   (e) En utilisant la suite finie $(u_k)_{1\leq k\leq n}$, avec $u_k = 2^{k-1}\frac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :
   $$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$
   (f) Est-ce que la majoration précédente est la meilleure possible ?
   Indication : Trouver un exemple de fonction f qui réalise l'égalité.
   Dans ce cas, on dit que cette majoration est optimale.

Partie III : Etude de deux espaces vectoriels.

E (respectivement F) désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux (respectivement continues) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad f(x+1) + f(x) = 0.$$

1. **Quelques propriétés.**

   (a) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (c) Montrer que si $f \in F$, alors f est bornée sur $[0, 1]$, puis en déduire qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (d) Démontrer que si $f \in E$, alors il existe $g \in F$ unique telle que, en tout point où f est continue, on a : $g'(x) = f(x)$. On note alors $g = T(f)$.
   On pose $T^1 = T$ et si $k \in \mathbb{N}^*$: $T^k = T \circ T^{k-1}$.

2. **Etude d'un élément de E.**
   On considère la fonction φ_0 de E telle que : $\varphi_0(0) = 0$ et $\varphi_0(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$.
   On pose $\varphi_k = T^k(\varphi_0)$ et $\lambda_k = \|\varphi_k\|_\infty$.
   (a) Montrer que φ_0 est périodique tout en précisant sa période.
   (b) Déterminer et représenter graphiquement sur le segment $[0, 2]$ les fonctions φ_k pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
   (c) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\varphi_k(-x) = (-1)^{k+1} \varphi_k(x)$$

   et

   $$\varphi_k(1-x) = (-1)^k \varphi_k(x).$$

   (d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$\lambda_{2k} = (-1)^k \varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)$$

   et

   $$\lambda_{2k-1} = (-1)^k \varphi_{2k-1}(0).$$

3. **Majoration de la norme de $T(f)$.**
   On fixe ici un élément f de E.
   (a) Montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}; \quad 2T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_1^x f(t)dt.$$

   (b) En déduire $2\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
   (c) Déterminer les fonctions f de E telles que : $\|f\|_\infty = 1$ et $\|T(f)\|_\infty = \frac{1}{2}$.
   (d) Déterminer les fonctions f de F telles que : $\|f\|_\infty = 1$ et $\|T(f)\|_\infty = \frac{1}{2}$.

4. **Autre exemple.**
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}; \quad f(x+2p) + f(x) = 0.$$

   (a) Montrer que f est périodique tout en précisant sa période.
   (b) Montrer que f est bornée ainsi que toutes ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n.
   (c) Montrer que si f possède q racines distinctes sur $[0, 2p[$, alors f' possède au moins q racines distinctes sur $[0, 2p[$.
   (d) Montrer que si f et f' possèdent exactement q racines distinctes sur $[0, 2p[$, alors elles n'ont aucune racine commune.

FIN