LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°3$-T- $n°2$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

19/03/2008

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties indépendantes.
La première partie est extraite du **concours Banque «Agro» -2004-BCPST**.
La deuxième partie est extraite du **concours e3a-session 2003-MP**.
La troisième partie est extraite du **concours e3a-session 2004-MP**.
Elles ont été modifiées pour qu'elles soient adaptées au programme de première année **MPSI**.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

Partie I : Étude d'une fonction.

Pour toute fonction F définie et continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et tout entier naturel non nul n, on définit l'application $F_n = T_n(F)$ par :

$$\forall x \neq 0; \quad F_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} F(t) dt$$

et

$$F_n(0) = F(0).$$

1. **Propriétés de T_n.**

   (a)- Montrer que T_n est linéaire de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (b)- Montrer que si F est paire, (respectivement impaire) alors $T_n(F)$ est paire, (respectivement impaire).
   (c)- Montrer que si F est positive, (respectivement négative) alors $T_n(F)$ est positive, (respectivement négative).
   (d)- Déterminer $T_n(F)$ dans chacun des cas suivants :
   (d-1) F est constante.
   (d-2) $F(0) = 0$ et pour tout réel t non nul : $F(t) = |t|^\alpha$; avec $\alpha > 0$.
   (d-3) F est une fonction polynomiale non nulle de degré p.

2. **Étude de F_n au voisinage de 0.**

(a) Montrer que $F_n = T_n(F)$ est continue en 0.
(b) En déduire que F_n appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, et que T_n définit un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
(c) Montrer que $F_n = T_n(F)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; \quad (F_n)'(x) = \frac{n}{x}[F(x) - F_n(x)]. \quad (*)$$

(d) **Injectivité-Surjectivité :**
(d-1) Montrer que T_n est injective.
(d-2) L'application $x \mapsto |x-1|$ admet-elle un antécédent par T_n ?
(d-3) T_n est-elle surjective de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vers lui même ? Est-elle bijective ?

3. **Une restriction de T_n.**
On considère dans cette question, la restriction de T_n à l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qu'on note toujours T_n. On suppose que F appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que $F_n = T_n(F)$ est dérivable en 0 et que :

$$(F_n)'(0) = \frac{n}{n+1}F'(0).$$

(b) En utilisant $(*)$, montrer que $F_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
(c) L'endomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ défini par T_n est-il surjectif ?

4. **Étude à l'infini.**

(a) Montrer que si F tend vers 0 en $+\infty$, alors F_n tend vers 0 en $+\infty$.
(b) En déduire que si F tend vers une limite finie l en $+\infty$, alors la fonction F_n tend vers l en $+\infty$.
(c) Montrer que si F tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors F_n tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
(d) A-t-on : si F tend vers $-\infty$ en $+\infty$, alors F_n tend vers $-\infty$ en $+\infty$?

5. **Étude d'un exemple.**
On définit la fonction F par : $\begin{cases} F(t) = 0 & si \quad t \in]-\infty, 0[\\ F(t) = 3t^2 - 2t^3 & si \quad t \in [0,1] \\ F(t) = 1 & si \quad t \in]1, +\infty[\end{cases}$
(a) Vérifier que F est bien un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer la fonction F_n.
(c) Déterminer les fonctions F' et $(F_n)'$.
(d) Pour tout réel x fixé, montrer que la suite de terme général $F_n(x)$ converge vers $F(x)$.

6. **Retour au cas général.**
Dans cette question, on suppose que F appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, qu'elle est positive croissante et convergente vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
On pose $f = F'$ et $f_n = (F_n)'$.
(a) Montrer que l'application F_n est positive et croissante.
(b) Calculer les limites de F_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
(c) Soient $m \in \mathbb{R}^*$ et $r \in [|1, n-1|]$, établir la double égalité :

$$\int_0^m x^r f_n(x)dx = \frac{nm^r}{n-r}[F_n(m) - F_r(m)] = \frac{n}{n-r}\left(\int_0^m x^r f(x)dx - \frac{1}{m^{n-r}}\int_0^m x^n f(x)dx\right).$$

Indication : on utilisera $(*)$ et des intégrations par parties.

Partie II : Etude d'une équation différentielle.

1. **Normes sur $\mathcal{C}^1(I)$.**
   On rappelle qu'une application N définie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vers $\mathbb{R}_+$ est une norme sur E si elle vérifie :
   - (i) $\forall x \in E; \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = O_E$.
   - (ii) $\forall x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
   - (iii) $\forall (x,y) \in E^2$ alors $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

   Dans cette question, $I = [a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$; avec $a < b$.
   Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(I)$, on pose :

   $$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|; \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx; \quad et \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

   (a) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ sont bien définies.
   (b) Montrer que $\|.\|_1$ définit une norme sur $\mathcal{C}^0(I)$.
   (c) Montrer que $\|.\|_2$ définit une norme sur $\mathcal{C}^0(I)$.
   (d) Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(I)$, on pose : $\|f\|_3 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b |f'(x)|^2 dx}$.
   Montrer que $\|.\|_3$ définit une norme sur $\mathcal{C}^1(I)$.

2. **Étude d'une équation différentielle.**
   Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif.
   On considère l'équation différentielle :

   $$y' + cy = f \quad (E)$$

   (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
   (b) Démontrer que l'application définie sur I par $\varphi(f) : x \mapsto \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t)dt$ est une solution particulière de (E) sur I.
   (c) Résoudre (E) sur I.
   (d) Prouver que $\varphi(f)$ est l'unique solution de (E) sur I vérifiant $\varphi(f)(0) = 0$.
   (e) Exprimer $[\varphi(f)]'$ en fonction de f et $\varphi(f)$, puis montrer que $\varphi(f) \in \mathcal{C}^1(I)$.
   (f) Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

3. **Propriétés de $\varphi(f)$.**
   On suppose dans cette question que $I = [a,b]$; avec $a \leq 0 < b$ et que $f \in \mathcal{C}^0(I)$.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels positifs M_1 et M_2 tels que :

   $$\|f\|_1 \leq M_1 \|f\|_2 \leq M_2 \|f\|_\infty.$$

   (b) Montrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

   $$\|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty.$$

   (c) Montrer qu'il existe un réel positif A tel que :

   $$\forall x \in I; \quad |\varphi(f)(x)| \leq A \|f\|_1.$$

   (d) Montrer qu'il existe un réel positif B tel que :

   $$\forall x \in I; \quad |\varphi(f)(x)| \leq B \|f\|_2.$$

   (e) En déduire qu'il existe un réel positif K tel que :

   $$\|\varphi(f)\|_2 \leq K \|f\|_2.$$

4. **Exemple.**
On suppose dans cette question que $I = [0, +\infty[$ et pour tout $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I; \quad f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}.$$

(a) Déterminer $\varphi(f_\lambda)$, au cas où $\lambda = c$.
(b) Déterminer $\varphi(f_\lambda)$, au cas où $\lambda \neq c$.
(c) Calculer la limite de $\varphi(f_\lambda)$ en $+\infty$.
(d) On pose $g = \varphi(f_\lambda)$, on a donc : $g' + cg = f_\lambda$. Démontrer que :

$$\forall X > 0; \quad \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)dt = \int_0^X f_\lambda(t)g(t)dt.$$

Partie III : Deux exemples d'équations différentielles.

1. **Premier exemple.**
On considère l' équation différentielle :

$$y' + 2xy = 1 \quad (E).$$

On considère la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt.$$

(a) Montrer que g est impaire.
(b) Montrer que g est une solution particulière de (E).
(c) Résoudre l'équation homogène associée à (E).
(d) Résoudre (E).
(e) Montrer que :$\forall x \in \mathbb{R}_+; \quad 0 \leq g(x) \leq x$.

2. **Deuxième exemple.**
On considère l' équation différentielle :

$$y' - 2xy = 1 \quad (E).$$

On considère la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

(a) Montrer que g est impaire.
(b) Montrer que g est une solution particulière de (E).
(c) Résoudre l'équation homogène associée à (E).
(d) Résoudre (E).
(e) Montrer que :$\forall x \in \mathbb{R}_+; \quad x \leq g(x)$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
(f) Étudier la monotonie de g et dresser son tableau de variations.

FIN