LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°1$-T $n°1$

20/10/2007

Ce devoir suréillé est composé d'un exercice et d'un problème formé de trois parties : les deux dernières sont dépendantes.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie, de la clareté et de la rigueur des raisonnements. Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront etre centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Exercice.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E_n un ensemble de cardinal n.
On note $\prod_n$ le nombre de partitions de E_n, avec la convention $\prod_0 = 1$.

1. Calculer $\prod_1, \prod_2, \prod_3$ et $\prod_4$.
2. Etablir la relation :$\prod_n = \sum\limits_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} \prod_{n-p}$.
3. Calculer $\prod_5, \prod_6$ et $\prod_7$.

2 Problème.

Partie I : Calcul de sommations.

- Le but de cette partie est de donner une méthode permettant de calculer les sommes de puissances données d'entiers consécutifs, afin de répondre à une question d'un élève de **Sup3**.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Notations :

- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose :

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

et $\quad C_\alpha^0 = 1$.

- Pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\mathcal{B}(n,p) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

1. **Résultats préliminaires.**
   (a)- Vérifier que pour $\alpha \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, on a : $C_\alpha^k = 0$.
   (b)- Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors :
$$C_\alpha^k = C_{\alpha-1}^k + C_{\alpha-1}^{k-1}.$$
   (c)- Montrer que si $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, alors :
$$C_\alpha^k = \frac{k+1}{\alpha+1} C_{\alpha+1}^{k+1}.$$
   (d)- Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall i \in \mathbb{N}^*; \quad \sum_{k=1}^{n} C_k^i = C_{n+1}^{i+1}.$$
2. **Cas partticuliers.**
   (a)- Donner la valeur de $\mathcal{B}(n,1)$ et démontrer la formule ainsi obtenue par récurrence.
   (b)- Donner la valeur de $\mathcal{B}(n,2)$ et démontrer la formule ainsi obtenue par récurrence.
   (c)- Donner la valeur de $\mathcal{B}(n,3)$ et démontrer la formule ainsi obtenue par récurrence.
3. **Cas général.**
   (a)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, prouver l'existence d'une suite double $(S_{i,p})_{(i,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels telle que :
$$S_{1,1} = 1$$
   et
$$\forall (i,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; \quad n^p = \sum_{i=1}^{p} S_{i,p} C_n^i.$$
   (b)- Montrer que :
$$\forall (i,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; \quad S_{1,p+1} = S_{1,p}$$
   et que :
$$S_{p+1,p+1} = (p+1) S_{p,p}$$
   (c)- En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^*; \quad S_{1,p} = 1$ et que $\quad S_{p,p} = p!$.
   (d)- Montrer que :
$$\forall (i,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; 2 \le i \le p-1; \quad S_{i,p+1} = i(S_{i,p} + S_{i-1,p}).$$
   (e)- Démontrer que :
$$\forall (i,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; \quad \mathcal{B}(n,p) = \sum_{i=1}^{p} S_{i,p} C_{n+1}^{i+1} \qquad (\star)$$
4. **Applications.**
   En utilisant la formule $(\star)$:
   (a)- Retrouver la valeur de $\mathcal{B}(n,1)$.
   (b)- Retrouver la valeur de $\mathcal{B}(n,2)$.
   (c)- Retrouver la valeur de $\mathcal{B}(n,3)$.
   (d)- Calculer la valeur de $\mathcal{B}(n,4)$.
   (e)- Calculer la valeur de $\mathcal{B}(n,5)$.
5. **Quelques identités entre les $\mathcal{B}(n,p)$.**
   Pour allèger les notations, on pose pour n fixé : $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}(n,p)$.
   Montrer chacune des identités suivantes :
   (a) $3\mathcal{B}_5 = \mathcal{B}_1^2(4\mathcal{B}_1 - 1)$.
   (b) $4(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_3) = n(n+1)(n^2+n+2)$.

(c) $4(\mathcal{B}_5 + \mathcal{B}_3) = n^2(n+1)^2(n^2+n+1)$.

(d) $\mathcal{B}_5 + \mathcal{B}_7 = \mathcal{B}_1^3 n(n+1) = 2\mathcal{B}_3^2$.

(e) Montrer que pour (p, q, r, m) dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad (\mathcal{B}_p)^m = (\mathcal{B}_q)^r \Leftrightarrow (p,q) = (1,3) \quad et \quad (m,r) = (2,1).$$

Partie II : Ensembles dénombrables.

Un ensemble E est dit dénombrable si, et seulement s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
E est dit au plus dénombrable si, et seulement s'il est fini ou dénombrable.

1. **Premiers exemples d'ensembles dénombrables.**
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ est infini.
   (b) Vérifier que $\mathbb{N}$ est dénombrable.
   (c) Montrer que l'application φ définie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ par :$\varphi(i,j) = i + \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$ est bijective.
   (d) En déduire que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
   (e) Montrer que l'application ψ définie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}^*$ par :$\psi(i,j) = 2^i(2j+1)$ est bijective, puis retrouver le fait que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
2. **Quelques propriétés.**
   (a) Montrer que si E est au plus dénombrable et A est une partie de E, alors A est au plus dénombrable.
   (b) Montrer que si E est dénombrable et A est une partie infinie de E, alors A est dénombrable.
   (c) Montrer que si E est dénombrable et s'il existe une surjection f de E sur un ensemble F, alors F est au plus dénombrable.
   A quelle condition F est dénombrable ?
   (d) Montrer que si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors $E \cup F$ est dénombrable.
   (e) Montrer que si $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie d'ensembles dénombrables, alors $\cup_{k=1}^{n} E_k$ est dénombrable.
   (f) Montrer que si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.
3. **Autres exemples.**
   (a) Revérifier que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
   Indication :utiliser le fait que tout élément $x \in \mathbb{Q}^+$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = \frac{p}{q}$; où $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $p \wedge q = 1$.
   (d) L'ensemble $\mathbb{R}$ est-il dénombrable ?
4. **Autres propriétés.**
   (a) Montrer que si $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie d'ensembles dénombrables, alors $\prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ est dénombrable.
   (b) Montrer que si $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dénombrables, alors $\cup_{k=0}^{+\infty} E_k$ est dénombrable.
   (c) Que peut-on dire de la partie $\cap_{k=0}^{+\infty} E_k$?
5. **$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.**
   Soient E un ensemble non vide et f une application quelconque définie de E vers $\mathcal{P}(E)$.
   On veut montrer que f ne peut pas etre surjective.On considère l'ensemble :
   $$A = \{x \in E / x \notin f(x)\}.$$

(a) Montrer que $A \notin f(E)$.
(b) Conclure.
(c) En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
(d) Que peut-on dire de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$? et de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Partie III : Limites inférieure et supérieure.

On considère un ensemble non vide E et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E, on définit :

- la limite inférieure de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\liminf_n A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} \cap_{m=n}^{+\infty} A_m$.
- la limite supérieure de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\limsup_n A_n = \cap_{n=1}^{+\infty} \cup_{m=n}^{+\infty} A_m$.

Si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = A$, on dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A.

1. **Propriétés.**
   (a) Montrer que $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.
   (b) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties dénombrables de E, montrer que $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ sont au plus dénombrables.Sont-elles dénombrables ?
   (c) Montrer que $\overline{\liminf_n A_n} = \limsup_n \overline{A_n}$ et $\overline{\limsup_n A_n} = \liminf_n \overline{A_n}$.
   (d) Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N};\ A_n \subset A_{n+1}$, montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (e) Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N};\ A_{n+1} \subset A_n$, montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. **Etude d'un exemple.**
   Soient A et B deux parties de E, posons :
   $$\forall n \in \mathbb{N}; \quad A_{2n} = A; A_{2n+1} = B.$$
   (a) Montrer que $\liminf_n A_n = A \cap B$.
   (b) Montrer que $\limsup_n A_n = A \cup B$.
   (c) La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
3. **Images directe et réciproque.**
   On considère une application f d'un ensemble E vers un ensemble F.
   Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E ; et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de F.
   (a) Montrer que $f^{-1}(\liminf_n B_n) = \liminf_n f^{-1}(B_n)$.
   (b) Montrer que $f^{-1}(\limsup_n B_n) = \limsup_n f^{-1}(B_n)$.
   (c) A-t-on : $f(\liminf_n A_n) = \liminf_n f(A_n)$? A-t-on : $f(\limsup_n A_n) = \limsup_n f(A_n)$? Justifier votre réponse.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que les deux identités précédentes soient vraies.

FIN