LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°2$-T- $n°3$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

07/06/2008

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties dépendantes.
La première partie est extraite du **concours national marocain -2006-MP**.
La deuxième partie est une introduction de la troisième.
La dernière partie est extraite du **concours commun polytechnique :CCP-2008-MP**.
Elles ont été modifiées pour qu'elles soient adaptées au programme de première année **MPSI**.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

Dans tout le problème, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier natural supérieur ou égal à 2. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, $Tr(A)$ sa trace et $rg(A)$ son rang.
Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,2,\ldots,n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne valant 1 ; on rappelle que la famille $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}; \quad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}.$$

avec $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{j,k} = 0$ si non.
Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $GL_n(\mathbb{K})$, on notera $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ les applications définies de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) dans lui même par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \quad u_{P,Q}(M) = PMQ \quad et \quad v_{P,Q}(M) = P^tMQ.$$

On dira qu'une application linéaire ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) dans lui même :
- conserve le rang si, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \quad rg(\phi(M)) = rg(M)$.
- conserve le déterminant si, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \quad \det(\phi(M)) = \det(M)$.
- conserve la trace si, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \quad Tr(\phi(M)) = Tr(M)$.

Partie I : Endomorphismes conservant le rang.

1. **Étude de $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$.**

   (a)- Montrer que $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ sont deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b)- Justifier que $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent le rang.
   (c)- A quelle condition sur P et Q les endomorphismes $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent -t-ils le déterminant ?
   (d)- A quelle condition sur P et Q les endomorphismes $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent -t-ils la trace ?

2. **Trace d'une matrice.**
   Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,2,\ldots,n\}$, exprimer les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$, montrer que A est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (c) Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,2,\ldots,n\}$, calculer $Tr(AE_{i,j})$.
   (d) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $Tr(AM) = 0$; montrer que A est nulle.
   (e) Montrer que pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

   $$Tr(AB) = Tr(BA).$$

   (f) Montrer que deux matrices semblables M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possèdent même trace même déterminant et même rang.
   (g) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

   $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \quad f(AB) = f(BA).$$

   Montrer que $f = \lambda Tr$, où λ est une constante de $\mathbb{K}$.

   * * * * * * * * * *

   Jusqu'à la fin de cette partie, on considère un endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le déterminant c'est à dire tel que :

   $$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); \quad \det(\phi(M)) = \det(M).$$

   On veut montrer que ϕ conserve le rang.
   Pour tout $r \in \{1,2,\ldots,n\}$, on pose $K_r = I_n - J_r$ où J_r est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

   $$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On considère une matrice M ,fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang r : $rg(M) = r$.

3. **Calculs préliminaires.**

   (a) Soient $s \in \{1,2,\ldots,n\}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det(xJ_s + A)$ définit, en fonction de x, un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à s.
   Indication : on pourra utiliser l'expression suivante du déterminant :
   $\det(A) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, en séparant le cas où σ laisse invariants tous les éléments de $\{1,2,\ldots,s\}$ et le cas contraire.

(b) Justifier qu'il existe deux matrices R et S inversibles telles que $M = RJ_rS$.
(c) Calculer $\det((x-1)J_r + I_n)$.
(d) On pose $N = RK_rS$; montrer que :

$$\det(xM + N) = \det(R)\det(S)x^r.$$

4. **D'abord une inégalité.**
Supposons que $rg(\phi(M)) = s$.
(a) Montrer que $\det(x\phi(M)) + \phi(N)))$ définit, en fonction de x, un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à s.
Utiliser la linéarité de ϕ et la question $(I-3-a)$.
(b) Montrer que $\det(x\phi(M)) + \phi(N))) = \det(R)\det(S)x^r$.
(c) En déduire que $r \leq s$ c'est à dire que $rg(M) \leq rg(\phi(M))$.
(d) Montrer que ce dernier résultat est encore vrai dans le cas $r = 0$.

5. **Ensuite l'égalité.**

(a) En utilisant la question $(I-4-c)$, montrer que l'endomorphisme ϕ est injectif.
(b) En déduire que l'endomorphisme ϕ est bijectif.
(c) Montrer que l'endomorphisme ϕ^{-1}, lui aussi, conserve le déterminant.
(d) En déduire que $rg(M) \leq rg(\phi^{-1}(M))$, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(e) Conclure que l'endomorphisme ϕ conserve le rang, c'est à dire que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); \quad rg(\phi(M)) = rg(M).$$

(f) Énoncer le résultat démontré dans cette partie.

Partie II : Polynôme caractéristique.

A toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on associe le polynôme $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$; appelé polynôme caractéristique de A. Toute racine de ce polynôme sera appelée une valeur propre de A.
L'ensemble des valeurs propres de A sera appelé spectre de A et sera noté $Sp(A)$.

1. **Quelques exemples.**
Calculer $\chi_A(X)$, puis déterminer les valeurs propres de A et $Sp(A)$ dans chacun des cas suivants :
(a) $A = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.
(b) A est une matrice triangulaire.
(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. **Cas où $n = 2$.**
Supposons dans cette question que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
(a) Démontrer que $\chi_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$.
(b) Montrer que $\chi_A(A) = 0$.

* * * * * * * * * *

En fait ce résultat est vrai pour toute matrice carrée de type (n, n) et il est appelé théorème de **Cayley-Hamilton**.

* * * * * * * * * *

(c) En déduire que si A est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(Tr(A)I_2 - A\right).$$

(d) Exprimer A^{-1} sous forme de tableau matriciel.

3. **Quelques propriétés.**
   On revient à présent au cas général $n \geq 2$.
   (a) Montrer que les matrices A et sa transposée ${}^tA$ possèdent le même polynôme caractéristique, c'est à dire que $\chi_A(X) = \chi_{{}^tA}(X)$.
   Elles ont donc les mêmes valeurs propres et le même spectre.
   (b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.
   (c) Montrer que si A et B sont deux matrices semblables, alors $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.
   (d) Montrer que le polynôme $\chi_A(X)$ est de degré n et que son coefficient dominant est égal à $(-1)^n$. Quel est son coefficient constant ?
   Pour ce dernier point, on ne demande pas de justification.
   (e) Montrer que A est inversible si, et seulement si $0 \notin Sp(A)$.

4. **Autres Exemples.**
   Calculer $\chi_A(X)$, puis déterminer les valeurs propres de A et $Sp(A)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) $A = \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$.
   où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Partie III : Matrices à diagonale propre.

On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice à diagonale propre si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - X).$$

On pourra noter en abrégé A est une **MDP** pour A est une matrice à diagonale propre.
On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

1. **Exemples.**

   (a) Montrer qu'une matrice triangulaire (respectivement. diagonale) est une matrice à diagonale propre.
   (b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$.
   Calculer le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$.
   (c) Montrer que $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre, pour tout réel α.
   (d) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la matrice antisymétrique A n'est pas une matrice à diagonale propre.

(e) Cas $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice A est une matrice à diagonale propre si, et seulement si $bc = 0$.

Donner alors tous les éléments de $\mathcal{E}_2$.

2. **Inverse d'une MDP.**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si A est à diagonale propre, alors A est inversible si, et seulement si, on a :

$$\forall i \in [|1, 3|]; \quad a_{i,i} \neq 0.$$

Utiliser la question $(II - 3 - e)$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que la matrice A est à diagonale propre, puis qu'elle est inversible.

(c) Déterminer l'inverse A^{-1} de A.

(d) Montrer que la matrice A^{-1} est aussi à diagonale propre.

3. **Test dans le cas $n = 3$.**

On considère $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) En utilisant la méthode de **Sarrus**, donner l'expression de $\det(A)$, en fonction des coefficients $a_{i,j}$.

(b) En déduire l'expression de $\chi_A(X)$, en fonction des coefficients $a_{i,j}$ et de X.

Sans reprendre les calculs précédents.

(c) Démontrer alors que A est à diagonale propre , et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} a_{i,i} \quad et \quad a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,2} = 0.$$

(d) Parmi les matrices suivantes indiquer celles qui sont à diagonale propre :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. **Exemples de matrices par blocs.**

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; où A et C sont des matrices carrées, démontrer que :

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

(b) En déduire que $\chi_M(X) = \chi_A(X).\chi_C(X)$.

(c) Donner alors un exemple d'une matrice M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ à diagonale propre contenant treize réels non nuls.

On pourra la construire par blocs.

(d) Donner un exemple d'une matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ à diagonale propre ; où A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul.

5. **Quelques propriétés.**

   (a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre ; démontrer que pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et $a^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.
   (b) Démontrer que toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme de deux matrices à diagonale propre.
   Penser à décomposer A en deux matrices triangulaires.
   (c) L'ensemble $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

6. **Matrices symétriques à diagonale propre.**
   Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M =^t AA$.
   (a) Vérifier que la matrice M est symétrique.
   (b) Démontrer que $Tr(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.
   On admet que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, alors $Tr(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.
   (c) En utilisant ce résultat, montrer si de plus A est à diagonale propre, alors A est une matrice diagonale, c'est-à-dire $A = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.
   (d) Déterminer alors les matrices symétriques à diagonale propre.

7. **Matrices antisymétriques à diagonale propre.**
   Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice antisymétriques à diagonale propre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose toujours $M =^t AA$.
   (a) Démontrer que $A^n = 0$, puis calculer $M^n = 0$.
   (b) Démontrer que $M = 0$.
   (c) Conclure que $A = 0$.
   (d) Déterminer alors les matrices antisymétriques à diagonale propre.

FIN