LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°2$-T- $n°2$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

23/02/2008

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties indépendantes. La première partie est extraite du **concours national commun-session 2007-BCPST**. La deuxième partie est extraite du **concours national commun-session 2007-MP**. Elles ont été modifiées pour qu'elles soit adaptées au programme de première année **MPSI**. Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

1 Problème.

Partie I : L'irrationalité du nombre π.

Soient a et b deux réels, pour tout entier naturel n non nul, P_n est le polynôme défini par :

$$P_n = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!}.$$

1. **Préliminaires**

   (a)- Préciser le degré de P_n et donner son coefficient dominant.
   (b)- Quelles sont les racines de P_n ? Donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
   Dans la suite de cette partie I, on suppose que le réel b est strictement positif.
   (c)- A quelles conditions sur les paramètres a, b et n le polynôme P_n est-il irréductible sur $\mathbb{R}$?
   (d)- Calculer les valeurs de tous les coefficients de P_n.

2. **Dérivation de P_n.**

   (a) Donner, sans aucun calcul, les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$, pour tout $k \in [|0, n-1|]$. Justifier votre réponse.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [|n, 2n|]$:

$$P_n^{(k)} = \sum_{p=n-k}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!(n-k+p)!}(-b)^{k-p}X^{n-p}(a-bX)^{n-k+p}.$$

   On pourra utiliser la formule de Leibniz.

(c) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$, pour tout $k \in [|n, 2n|]$.
(d) Vérifier que si a et b sont des entiers, alors il en est de même pour :

$$P_n^{(k)}(0) \quad et \quad P_n^{(k)}(\frac{a}{b}).$$

3. **Un peu d'arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$.**
On considère deux autres réels c et d, un entier naturel m et le polynôme :

$$Q_m = \frac{X^m(c-dX)^m}{m!}.$$

(a) Calculer $X^m \wedge X^n$ et $X^m \vee X^n$.
(b) Calculer $(c-dX)^m \wedge (a-bX)^n$ et $(c-dX)^m \vee (a-bX)^n$.
(c) Calculer $P_n \wedge Q_m$ et $P_n \vee Q_m$.
(d) A quelles conditions les polynômes P_n et Q_m sont-ils premiers entre eux ?

4. **Étude d'une fonction polynômiale.**
Désormais, on suppose que les deux réels a et b sont strictement positifs.
On note $\widetilde{P_n}$ la fonction polynômiale associée au polynôme P_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Étudier la fonction $\widetilde{P_n}$ et dresser son tableau de variations.
(b) En déduire que la restriction de $\widetilde{P_n}$ au segment $[0, \frac{a}{b}]$ est positive et bornée, puis déterminer sa borne supérieure notée $\beta_n = \sup_{0 \leq x \leq \frac{a}{b}} P_n(x)$.
(c) α étant un réel strictement positif, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{\alpha^n}{n!} \quad ,\forall n \geq 1.$$

(c-1) Montrer que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
(c-2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
(c-3) Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$?

5. **Le réel π est irrationnel.**
On se propose de montrer l'irrationalité de π par l'absurde, et on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls c et d tels que $\pi = \frac{c}{d}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on note

$$Q_n = \frac{X^n(c-dX)^n}{n!} \quad et \quad I_n = \int_0^\pi Q_n(x)\sin x dx.$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1; \quad 0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{n!}\left(\frac{c^2}{4d}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
(b) Montrer soigneusement que $\forall n \geq 1; \quad I_n \neq 0$.
(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n}\left(Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right)\cos\left(\frac{c}{d}+k\frac{\pi}{2}+\pi\right) - Q_n^{(k)}(0)\cos\left(k\frac{\pi}{2}+\pi\right)\right).$$

(d) Justifier alors que pour tout $n \geq 1$, I_n est un entier.
(e) Conclure que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Partie II : Une preuve du théorème de D'Alembert.

1. **Résultats préliminaires.**

   Soit P un polynôme à coefficients complexes s'écrivant $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$.

   (a) Montrer que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \frac{|P(z)|}{|a_d||z|^d} = 1$, la variable z étant complexe.

   On écrit $|P(z)| \sim |a_d||z|^d$ lorsque $|z| \to +\infty$.

   (b) En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

   $$|z| \geq R \Rightarrow \frac{1}{2}|a_d||z|^d \leq |P(z)| \leq 2|a_d||z|^d.$$

   (c) Montrer que la partie $A = \{|P(z)|/z \in \mathbb{C}\}$ de $\mathbb{R}$ est minorée et atteint sa borne inférieure.

   (d) En déduire que l'application $z \mapsto |P(z)|$ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint sa borne inférieure.

2. **Théorème de D'Alembert.**

   (a) Énoncer le théorème de D'Alembert.

   *** Ce théorème s'appelle aussi le théorème fondamental de l'algèbre. ***

   Soient b un complexe non nul et Q un polynôme à coefficients complexes tel que $Q(0) = 0$; on pose $Q_1 = 1 + bX^k + X^k Q$, $k \in \mathbb{N}^*$.

   Soit enfin α une racine k-ème de $\frac{-1}{b}$.

   (b) Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que :

   $$|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq \frac{1}{2}.$$

   (c) Un tel t_0 est choisi montrer que :

   $$|Q_1(\alpha t_0)| < 1.$$

   (d) **Inégalité d'Argrand :**

   Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes, et γ un nombre complexe tel que $P(\gamma) \neq 0$.

   Montrer qu'il existe δ complexe tel que $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$.

   On pourra considérer le polynôme Q_1 tel que $Q_1(z) = \frac{P(\gamma+z)}{P(\gamma)}; \quad z \in \mathbb{C}$.

   (e) **Application :**

   Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes, on note z_0 un complexe où l'application $z \mapsto |P(z)|$ atteint sa valeur minimale.

   Montrer que z_0 est une racine du polynôme P.

   (f) En déduire que tout polynôme non constant à coefficients complexes est scindé sur $\mathbb{C}$.

3. **Cas des polynômes à coefficients réels.**

   (a) Est-il vrai qu'un polynôme non constant à coefficients réels admet au moins une racine réelle ? Justifier votre réponse.

   (b) Est-il vrai qu'un polynôme non constant à coefficients réels admet au moins une racine complexe ? Justifier votre réponse.

   (c) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair $2n + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.

   c-1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)$.

   c-2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$.

c-3) Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.
On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

(d) Soient n et p deux entiers strictement positifs impairs et $d = n \wedge p$, prouver que :

$$(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^d - 1).$$

(e) Quelles sont les racines réelles de $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1)$?

Partie III : Applications multiplicatives.

Une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est dite multiplicative si elle vérifie la condition suivante :

$$n \wedge m = 1 \Rightarrow f(nm) = f(n)f(m).$$

1. **Nombre de diviseurs d'un entier.**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\delta(n)$ le nombre des diviseurs positifs de n.
   (a) Calculer $\delta(n)$, pour $1 \leq n \leq 10$.
   (b) Calculer $\delta(p)$ et $\delta(p^\alpha)$, pour tout nombre premier p et tout entier α.
   (c) Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de n, calculer $\delta(n)$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.
   (d) Montrer que l'application δ est multiplicative.
   (e) Calculer $\delta(75000)$.
2. **Somme des diviseurs d'un entier.**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n : $\sigma(n) = \sum\limits_{d|n} d$.
   (a) Calculer $\sigma(n)$, pour $1 \leq n \leq 10$.
   (b) Calculer $\sigma(p)$ et $\sigma(p^\alpha)$, pour tout nombre premier p et tout entier α.
   (c) Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de n, calculer $\sigma(n)$ en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_r$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.
   (d) Montrer que l'application σ est multiplicative.
   (e) Calculer $\sigma(75000)$. Le nombre 75000 est-il parfait ?
3. **Somme des puissances des diviseurs d'un entier.**
   Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\sigma_k(n)$ la somme des puissances $k - emes$ des diviseurs positifs de n : $\sigma_k(n) = \sum\limits_{d|n} d^k$.
   (a) Calculer $\sigma_2(n)$, pour $1 \leq n \leq 10$.
   (b) Calculer $\sigma_k(p)$ et $\sigma_k(p^\alpha)$, pour tout nombre premier p et tout entier α.
   (c) Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de n, montrer que :
   $$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$
   (d) Montrer que l'application σ_k est multiplicative.
   (e) Calculer $\sigma_2(75000)$.
4. **Indicateur d'Euler.**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\varphi(n)$ le nombre des entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n :
   $$\varphi(n) = Card\{k \in [|1, n|]/k \wedge n = 1\}.$$
   (a) Calculer $\varphi(n)$, pour $1 \leq n \leq 10$.
   (b) Calculer $\varphi(p)$ et $\varphi(p^\alpha)$, pour tout nombre premier p et tout entier α.

(c) Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de n, montrer que :

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

(d) Montrer que l'application φ est multiplicative.

(e) Calculer $\varphi(999999)$.

5. **Propriétés de l'indicateur d'Euler.**

(a) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\varphi(n^k) = n^{k-1} \varphi(n).$$

On pourra procéder par récurrence.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) \varphi(k) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair, on a :

$$\sum_{2d|n} \varphi\left(\frac{n}{2d}\right) = \sum_{2d+1|n} \varphi\left(\frac{n}{2d+1}\right) = \frac{n}{2}.$$

FIN