

LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé n°3-T- n°1
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

8/12/2007

Ce devoir surveillé est composé d'un exercice et d'un problème formé de trois parties dépendantes.

Il sera tenu compte de la présentation de la copie, de la clarté et de la rigueur des raisonnements. Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.

Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.

Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

1 Exercice.

1. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$\forall n \geq 1; u_n = \frac{\sum_{k=1}^n E(kx)}{n^2}$$

où x est un réel donné.

(a)- Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

(b)- En déduire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$\forall n \geq 1; u_n = \left(\prod_{p=0}^n C_n^p \right)^{\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}} = (C_n^0 \times C_n^1 \times \dots \times C_n^n)^{\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}}.$$

(a)- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}; \forall p \in [0, n]; 1 \leq C_n^p \leq 2^n$.

(b)- En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite à déterminer.

3. On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ telles que :

$$\forall n \geq 1; u_n = \frac{E(nx)}{n}; \quad v_n = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right);$$

où x est un réel donné.

(a)- Calculer la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$.

(b)- Calculer la limite de $(v_n)_{n \geq 1}$.

2 Problème.

Définitions et notations :

- A toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est semi-sommable si, et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est semi-sommable.
- On rappelle qu'une suite est convergente lorsqu'elle possède une limite finie.
- On rappelle aussi que si f est une fonction continue décroissante sur un segment $[a, b]$; $a < b$; alors :

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)f(a).$$

Partie I : Suites semi sommables.

1. Résultats préliminaires.

- (a)- Calculer $S_{n+1} - S_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est semi-sommable, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
C'est ce qu'on appellera la condition nécessaire de semi-sommabilité.
- (b)- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$; est-elle semi-sommable ?
- (c)- La réciproque de la proposition prouvée à la question (I-1-a) est-elle vraie ?
- (d)- Montrer par deux méthodes différentes que La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = n$; n'est pas semi-sommable.
- (e)- Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est semi-sommable.
- (f)- Supposons que les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont semi-sommables, montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi semi-sommable.

2. Etude de quelques exemples.

- (a) A quelle condition sur le réel λ , la suite constante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ égale à λ est-elle semi-sommable ?
- (b) On pose : $u_n = q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; où q est un réel donné.
 - b-1) Calculer la valeur de S_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b-2) A quelle condition sur la raison q , la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle semi-sommable ?
- (c) On suppose ici que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r , avec $r \in \mathbb{R}$.
 - c-1) Calculer la valeur de S_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c-2) A quelle condition sur la raison r , la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle semi-sommable ?
- (d) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1; \quad u_n = \frac{1}{n}$.
On rappelle que dans ce cas on a : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

d-1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$

d-2) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas semi-sommable.

(e) Pour tout entier naturel non nul, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right); \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \quad G_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad K_n = H_n - \ln(n+1).$$

e-1) Etudier la monotonie de chacune des suites $(H_n)_{n \geq 1}$, $(G_n)_{n \geq 1}$, et $(K_n)_{n \geq 1}$.

e-2) Montrer que les suites $(G_n)_{n \geq 1}$, et $(K_n)_{n \geq 1}$ convergent vers une même limite notée γ .¹

e-3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est semi-sommable.

3. Opérations sur les suites semi-sommables.

On considère deux suites semi-sommables $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ainsi qu'un réel α .

(a)- Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est semi-sommable.

(b)- Montrer que la suite $(\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est semi-sommable.

(c)- Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des suites semi-sommables ?

4. Semi-sommabilité d'une suite alternée.

On considère la suite alternée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = (-1)^n x_n$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante convergente vers 0.

On garde toujours la notation $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

(a)- Etudier la monotonie de chacune des deux suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

(b)- Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(c)- En déduire que la suite alternée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est semi-sommable.

(d)- Etudier la semi-sommabilité de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

d-1) $x_n = \frac{1}{n+1}$.

d-2) $x_n = \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$.

d-3) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

Partie II : Sommabilité des suites positives.

Dans toute cette partie, on considère une suite positive $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n \geq 0.$$

1. Quelques propriétés.

(a) Etudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

On considère une deuxième suite positive $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq u_n \leq v_n$.

(c) Montrer que si, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

(d) Montrer que si, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

2. Suite de Riemann.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose pour tout entier naturel non nul :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

¹ γ : est appelée la constante "gamma" d'Euler.

(a) Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas sommable dans chacun des cas suivants :

$$\alpha \leq 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 1.$$

Indication : utiliser (I-1).

(b) En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas sommable dans le cas : $0 < \alpha < 1$.

(c) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 1$.

c-1) Montrer que : $\forall n \geq 2; \quad \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt$.

c-2) Montrer que : $\forall n \geq 1; \quad S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

c-3) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est sommable.

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α pour que la suite $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \geq 1}$ soit sommable.

3. Suite de Bertrand.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$\forall n \geq 2; \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

On considère $\delta = \frac{1+\alpha}{2}$ et $v_n = \frac{1}{n^\delta}$, pour tout $n \geq 2$.

(a) Si $\alpha > 1$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n}$, puis montrer que la suite $(\frac{v_n}{u_n})_{n \geq 2}$ est minorée par 1 à partir d'un certain rang.

En déduire que $(u_n)_{n \geq 2}$ est sommable.

(b) Si $\alpha < 1$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n}$, puis montrer que la suite $(\frac{v_n}{u_n})_{n \geq 2}$ est majorée par 1 à partir d'un certain rang.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ n'est pas sommable.

(c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$ et que $\beta \neq 1$.

c-1) Montrer que : $\forall n \geq 2; \quad \int_2^{n+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt \leq S_n \leq \int_1^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$.

c-2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est sommable si $\beta > 1$.

c-3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ n'est pas sommable si $\beta < 1$.

c-4) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ n'est pas sommable si $\beta = 1$.

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α et β pour que la suite $(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta})_{n \geq 2}$ soit sommable.

(e) Etudier la sommabilité de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ dans chacun des cas suivants :

e-1) $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^3}$.

e-2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^3}$.

e-3) $u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Partie III : Deux critères de sommabilité.

Dans cette partie, on considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n > 0$$

On note : $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

Notons que l et L appartiennent à $[0, +\infty]$, avec les éventualités $l = +\infty$ ou $L = +\infty$.

1. Critère de D'Alembert.

On va distinguer les cas suivant les valeurs de l .

(a) Supposons que $l < 1$, et soit $\epsilon > 0$ tel que $l + \epsilon < 1$.

a-1) Montrer l'existence d'un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0; \quad 0 \leq u_{n+1} \leq (l + \epsilon)u_n.$$

a-2) En déduire que

$$\forall n \geq n_0; \quad 0 \leq u_n \leq (l + \epsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

a-3) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

a-4) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

(b) Supposons que l est un réel vérifiant $l > 1$, et soit $\epsilon > 0$ tel que $l - \epsilon > 1$.

b-1) Montrer l'existence d'un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0; \quad u_{n+1} \geq (l - \epsilon)u_n.$$

b-2) En déduire que

$$\forall n \geq n_0; \quad u_n \geq (l - \epsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

b-3) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

b-4) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

(c) Supposons que $l = +\infty$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

(d) Que peut-on dire dans le cas $l = 1$?

(e) Enoncer alors le critère de D'Alembert ainsi démontré.

(f) Etudier la sommabilité de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

e-1) $u_n = \frac{x^n}{n!}$; où x est nombre réel donné.

e-2) $u_n = C_{3n}^n$.

e-3) $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{n!}$.

2. Critère de Cauchy.

Ici on va distinguer les cas selon les valeurs de L .

(a) Si $L < 1$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

(b) Si $L > 1$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

(c) Que peut-on dire dans le cas $L = 1$?

(d) Enoncer alors le critère de Cauchy ainsi démontré.

(e) Etudier la sommabilité de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

e-1) $u_n = \frac{1}{n^n}$.

e-2) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}}$.

e-3) $u_n = \left(\frac{n+3 \cos n}{2n+1}\right)^n$.

FIN