

LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé n°2-T- n°1
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

Corrigé

1 Problème.

Partie I : Fonctions moyennables.

1. Étude préliminaire.

Soient x, y deux éléments de $\mathcal{M}_1$, α et β deux nombres complexes donnés.

- (a)- Par linéarité de l'intégrale, on vérifie que : $M_T(\alpha x + \beta y) = \alpha M_T(x) + \beta M_T(y)$.
(b)- La limite suivante :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x) + \beta \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(y) = \alpha M(x) + \beta M(y)$$

existe dans $\mathbb{C}$ Donc : $\alpha x + \beta y$ est moyennable c.à.d : $\alpha x + \beta y \in \mathcal{M}_1$.

De plus : $M(\alpha x + \beta y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(\alpha x + \beta y) = \alpha M(x) + \beta M(y)$.

Ainsi : $\mathcal{M}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. (car il contient l'application nulle)

- (c)- Pour tout $T > 0$, on a :

$$|M_T(x) - M_T(y)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - y(t)) dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - y(t)| dt.$$

De plus : $\frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - y(t)| dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|x - y\|_\infty dt = \|x - y\|_\infty$.

Donc : $|M_T(x) - M_T(y)| \leq \|x - y\|_\infty$.

- (d)- En faisant tendre T vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$|M(x) - M(y)| \leq \|x - y\|_\infty.$$

- (e)- Soit $\tau \in \mathbb{R}$.

(e-1) Effectuons le changement de variable $s = t - \tau$, alors :

$$M_T(x_\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} x(s) ds.$$

En utilisant la relation de Chasles :

$$M_T(x_\tau) = M_T(x) + \frac{1}{T} \int_{-\tau}^0 x(s) ds + \frac{1}{T} \int_T^{T-\tau} x(s) ds.$$

- (e-2) On a : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^0 x(s) ds = 0$,

car $\int_{-\tau}^0 x(s) ds$ est une constante complexe.

(e-3) Pour τ fixé et tout $T > 0$, on a :

$$\left| \frac{1}{T} \int_T^{T-\tau} x(s) ds \right| \leq \frac{1}{T} |T - (T - \tau)| \|x - y\|_\infty = \frac{|\tau|}{T} \|x - y\|_\infty.$$

Puisque : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\tau|}{T} \|x - y\|_\infty = 0$, car $|\tau|$ est une constante réelle.

Alors : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{T-\tau} x(s) ds = 0$.

(e-4) Des 3 questions précédentes et puisque $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x) = M(x)$ existe dans $\mathbb{C}$

Alors : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x_\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x) = M(x)$ existe dans $\mathbb{C}$.

Par suite : x_τ est moyennable et on a : $M(x_\tau) = M(x)$.

(f)- Par récurrence :

(i) Pour $n = 2$, si x_1, x_2 sont moyennables et α_1, α_2 sont complexes, alors d'après

$$(I - 1 - b) : \sum_{k=1}^2 \alpha_k x_k \text{ est moyennable et } M\left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^2 \alpha_k M(x_k).$$

(ii) Soit $n \geq 2$, supposons que pour toutes fonctions $x_1, x_2, \dots, x_n$ moyennables et tous complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ alors $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ est moyennable et que :

$$M\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k M(x_k).$$

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ moyennables et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ des complexes.

On a : $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ et x_{n+1} sont moyennables.

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1}$ est moyennable et on a :

$$M\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = M\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) + \alpha_{n+1} M(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k M(x_k) + \alpha_{n+1} M(x_{n+1}).$$

$$\text{c.à.d : } M\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k M(x_k).$$

(iii) **Conclusion** : pour tout $n \geq 2$, toutes fonctions $x_1, x_2, \dots, x_n$ moyennables et tous complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ alors $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ est moyennable et on a :

$$M\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k M(x_k).$$

2. Un premier exemple.

Pour tout réel ω , on définit la fonction $e_\omega : t \mapsto e^{i\omega t}$.

(a) **Dérivées nèmes de e_ω .**

(a-1) la fonction e_ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car c'est la composée des deux fonctions : $t \mapsto \omega t$ et $t \mapsto e^{it}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(a-2) On montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel t :

$$e_\omega^{(n)}(t) = (i\omega)^n e^{i\omega t}.$$

(a-3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel t , on a :

$$e_\omega^{(2n)}(t) = (-1)^n \omega^{2n} e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad e_\omega^{(2n+1)}(t) = i(-1)^n \omega^{2n+1} e^{i\omega t}.$$

(a-4) D'après la question précédente et pour $\omega = 1$, on trouve :

$$e_1^{(2n)}(t) = \cos^{(2n)}(t) + i \sin^{(2n)}(t) = (-1)^n e^{it} = (-1)^n (\cos(t) + i \sin(t)).$$

Par identification : $\cos^{(2n)}(t) = (-1)^n \cos(t)$ et $\sin^{(2n)}(t) = (-1)^n \sin(t)$.

$$\text{De même : } e_1^{(2n+1)}(t) = \cos^{(2n+1)}(t) + i \sin^{(2n+1)}(t) = i(-1)^n e^{it}.$$

$$\text{c.à.d : } e_1^{(2n+1)}(t) = (-1)^n (i \cos(t) - \sin(t)).$$

Par identification : $\cos^{(2n+1)}(t) = (-1)^{n+1} \sin(t)$ et $\sin^{(2n+1)}(t) = (-1)^n \cos(t)$.

(a-5) Voir la question précédente.

(a-6) Voir le cours.

(a-7) Pour $n \in [0, 2]$: le calcul est simple.

Pour $n \geq 3$ on a : $f(t) = t^2 e_\omega(t) = g(t) e_\omega(t)$, avec $g(t) = t^2$.

Donc d'après la formule de Leibniz :

$$f^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)}(t) e_\omega^{(n-k)}(t) = \sum_{k=0}^2 C_n^k g^{(k)}(t) e_\omega^{(n-k)}(t) + \sum_{k=3}^n C_n^k g^{(k)}(t) e_\omega^{(n-k)}(t).$$

La deuxième sommation est nulle, car $g^{(k)}(t) = 0$, pour tout $k \geq 3$.

$$\text{Ainsi : } f^{(n)}(t) = t^2 (i\omega)^n e^{i\omega t} + 2nt(i\omega)^{n-1} e^{i\omega t} + n(n-1)(i\omega)^{n-2} e^{i\omega t}.$$

$$\text{c.à.d : } f^{(n)}(t) = (i\omega)^{n-2} (-t^2 \omega^2 + 2int\omega + n(n-1)) e_\omega(t).$$

(b) **Moyenne de e_ω .**

(b-1) Si ω est non nul et $T > 0$, alors :

$$M_T(e_\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega T} [e^{i\omega t}]_0^T = \frac{i(1-e^{i\omega T})}{\omega T} = \frac{ie^{\frac{i\omega T}{2}} (e^{-\frac{i\omega T}{2}} - e^{\frac{i\omega T}{2}})}{\omega T}.$$

D'après les formules d'Euler, on obtient :

$$M_T(e_\omega) = \frac{2e^{\frac{i\omega T}{2}} \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T}.$$

(b-2) Si ω est non nul, alors :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} |M_T(e_\omega)| = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{2e^{\frac{i\omega T}{2}} \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T} \right| = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{2 \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T} \right| = 0$$

$$\text{Car : } \left| \frac{2 \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T} \right| \leq \frac{2}{|\omega|T} \text{ et } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{|\omega|T} = 0.$$

$$\text{Donc : } \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(e_\omega) = 0.$$

Ainsi : e_ω est moyennable et que $M(e_\omega) = 0$.

(b-3) Par linéarité de l'intégrale, on a pour tout $T > 0$:

$$M_T(\cos) + iM_T(\sin) = M_T(e_\omega) = \frac{2e^{\frac{i\omega T}{2}} \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T}.$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on a :

$$M_T(\cos) = \frac{2 \cos(\frac{\omega T}{2}) \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T} = \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \quad \text{et} \quad M_T(\sin) = \frac{2 \sin^2(\frac{\omega T}{2})}{\omega T} = \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega T}.$$

(b-4) On a : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(\cos) + iM_T(\sin) = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(e_\omega) = 0$.

$$\text{Donc : } \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(\cos) = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(\sin) = 0.$$

Par suite : $\sin$ et $\cos$ sont moyennables et $M(\sin) = M(\cos) = 0$.

(b-5) On a : $M_T(e_0) = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt = 1$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(e_0) = 1$.

Donc : e_0 est moyennable et $M(e_0) = 1$.

(c) On rappelle qu'une fonction périodique non constante n'admet pas de limites ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Il est évident que la fonction e_1 est 2π -périodique non constante.

Donc elle n'admet pas de limites ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

(d) Il est évident que si $\omega \neq 0$, la fonction e_ω est $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique non constante.

Donc elle n'admet pas de limites ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Si $\omega = 0$, e_0 est constante égale à 1 :

Donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_0(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e_0(t) = 1$.

3. Exemple d'une fonction non moyennable.

On considère la fonction x_0 définie par :

$$\begin{cases} x_0(t) = e^{i \ln(t+1)} & \text{si } t > 0 \\ x_0(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

(a) D'après les théorèmes généraux, x_0 est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Et on a : $\lim_{t \rightarrow 0^-} x_0(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} x_0(t) = 1$.

Donc : x_0 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, de plus :

$$\begin{cases} |x_0(t)| = 1 & \text{si } t > 0 \\ |x_0(t)| = 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Donc : $|x_0(t)| \leq 1$, pour tout réel t .

Par suite : $x_0 \in \mathcal{B}$.

(b) Soit $T > 0$. Par intégration par parties, et en posant :

$$\begin{cases} u(t) = e^{i \ln(t+1)} & ; & u'(t) = \frac{i}{t+1} e^{i \ln(t+1)} \\ v'(t) = 1 & ; & v(t) = t \end{cases}$$

$$\text{Alors : } M_T(x_0) = e^{i \ln(T+1)} - \frac{i}{T} \int_0^T \frac{t e^{i \ln(t+1)}}{t+1} dt.$$

(c) Effectuons le changement de variable $s = \ln(t+1)$, c.à.d : $t = e^s - 1$ et $dt = e^s ds$:

$$M_T(x_0) = \frac{1}{T} \int_0^{\ln(T+1)} e^{is} e^s ds = \frac{1}{T} \int_0^{\ln(T+1)} e^{(i+1)s} ds$$

$$M_T(x_0) = \frac{1}{(i+1)T} [e^{is} e^s]_0^{\ln(T+1)} = \frac{T+1}{(i+1)T} e^{i \ln(T+1)} - \frac{1}{(i+1)T}.$$

(d) On a : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(i+1)T} \right| = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}T} = 0 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{(i+1)T} = 0$.

Mais : $T \mapsto e^{i \ln(T+1)}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Donc : $T \mapsto M_T(x_0)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Ainsi : x_0 n'est pas moyennable.

4. Cas particuliers.

(a) Soit x une fonction continue non constante de $\mathcal{B}$, périodique de période $P > 0$.

Notons que x est bornée, donc elle ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ en ni $+\infty$ ni en $-\infty$.

(a-1) Supposons que x admet l comme limite complexe en $+\infty$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x(t + nP) = x(t)$.

D'après le théorème de composition des limites, pour tout réel t :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t + nP) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t) = x(t).$$

c.à.d : la fonction x est constante, ceci est absurde.

Par suite : x n'admet pas de limite en $+\infty$.

(a-2) Supposons que x admet l comme limite complexe en $-\infty$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x(t - nP) = x(t)$.

D'après le théorème de composition des limites, pour tout réel t :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t - nP) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(t) = x(t).$$

c.à.d : la fonction x est constante, ceci est absurde.

Par suite : x n'admet pas de limite en $-\infty$.

(a-3) Soit $a \in \mathbb{R}$, d'après la relation de Chasles :

$$\int_a^{a+P} x(t)dt = \int_a^0 x(t)dt + \int_0^P x(t)dt + \int_P^{a+P} x(t)dt.$$

En posant : $s = t - P$, on obtient : $\int_P^{a+P} x(t)dt = \int_0^a x(s)ds = - \int_a^0 x(t)dt$.

Ainsi pour tout réel a : $\int_a^{a+P} x(t)dt = \int_0^P x(t)dt$.

(a-4) Soit $T > 0$, d'après la relation de Chasles, on a :

$$M_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{E(\frac{T}{P})-1} \int_{kP}^{(k+1)P} x(t)dt + \frac{1}{T} \int_{E(\frac{T}{P})P}^T x(t)dt$$

En appliquant la question précédente, on obtient :

$$M_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{E(\frac{T}{P})-1} \int_0^P x(t)dt + \frac{1}{T} \int_{E(\frac{T}{P})P}^T x(t)dt.$$

$$\text{Donc : } M_T(x) = \frac{E(\frac{T}{P})}{T} \int_0^P x(t)dt + \frac{1}{T} \int_{E(\frac{T}{P})P}^T x(t)dt.$$

D'une part : $\frac{1}{P} - \frac{1}{T} \leq \frac{E(\frac{T}{P})}{T} \leq \frac{1}{P} \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E(\frac{T}{P})}{T} = \frac{1}{P}$.

D'autre part :

$$\left| \frac{1}{T} \int_{E(\frac{T}{P})P}^T x(t)dt \right| \leq \frac{T - E(\frac{T}{P})P}{T} \|x\|_{\infty} < \frac{P}{T}.$$

Or : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{P}{T} = 0 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{E(\frac{T}{P})P}^T x(t)dt = 0$.

Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x) = \frac{1}{P} \int_0^P x(t)dt$.

Par suite x est moyennable et sa moyenne est $M(x) = \frac{1}{P} \int_0^P x(t)dt$.

(b) Si x est une fonction constante égale à c , on vérifie que, pour tout $T > 0$:

$$M_T(x) = c \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x) = c.$$

Donc x est moyennable et sa moyenne $M(x) = c$.

(c) Soit x une fonction de $\mathcal{B}$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c$, où c est un complexe.

(c-1) Question de cours.

(c-2) Soit $\varepsilon > 0$, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c$.

Donc : il existe $A > 0$, pour tout réel t : $t \geq A \Rightarrow |x(t) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $T \geq A$, on a :

$$|M_T(x) - c| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - c)dt \right| = \frac{1}{T} \left| \int_0^A (x(t) - c)dt + \int_A^T (x(t) - c)dt \right|.$$

$$\text{Donc : } |M_T(x) - c| \leq \frac{1}{T} \int_0^A |x(t) - c| dt + \frac{1}{T} \int_A^T |x(t) - c| dt \leq \frac{A}{T} (\|x\|_\infty + |c|) + \frac{1}{T} \int_A^T \frac{\varepsilon}{2} dt.$$

$$\text{Donc : } |M_T(x) - c| \leq \frac{A}{T} (\|x\|_\infty + |c|) + \frac{(T - A)}{T} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{A}{T} (\|x\|_\infty + |c|) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{A}{T} (\|x\|_\infty + |c|) = 0$.

Alors, il existe $A' > 0$ tel que : $T \geq A' \Rightarrow \frac{A}{T} (\|x\|_\infty + |c|) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $A'' = \max(A, A')$, on a : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A'' > 0$ tel que :

$T \geq A'' \Rightarrow |M_T(x) - c| \leq \varepsilon$.

c.à.d : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x) = c$.

Par suite : x est moyennable et sa moyenne est $M(x) = c$.

(c-3) f est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $|f|$ est majorée par 1.

Donc : $f \in \mathcal{B}$.

De plus : $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} = 0$.

D'où : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

D'après la question précédente : f est moyennable et sa moyenne est nulle.

Partie II : Fonctions de carré moyennable.

Notons que la fonction $x \in \mathcal{B}$ est de carré moyennable si et seulement si la fonction $|x|^2$ est moyennable et que la moyenne quadratique de x est égale à la moyenne de $|x|^2$.

1. Étude de quelques exemples.

(a) Si x est une fonction constante égale à c , alors $|x|^2$ est constante égale à $|c|^2$.

D'après (I - 4 - b) : $|x|^2$ est moyennable et $M(|x|^2) = |c|^2$.

Donc : x est de carré moyennable et sa moyenne quadratique est $M(|x|^2) = |c|^2$.

(b) On a : $|e_\omega|^2(t) = |x_0|^2(t) = 1$, pour tout $t > 0$.

D'où : $\lim_{+\infty} |e_\omega|^2 = \lim_{+\infty} |x_0|^2 = 1$

Donc d'après la question (I - 4 - c - 2) : $|e_\omega|^2$ et $|x_0|^2$ sont moyennables, et on a :

$$M(|e_\omega|^2) = M(|x_0|^2) = 1.$$

Par suite : $|e_\omega|^2$ et $|x_0|^2$ sont de carré moyennables et leur moyenne quadratique commune c'est 1.

(c) On a : $M_T(|f|^2) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\arctan(T)}{T}$.

Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(|f|^2) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(T)}{T} = 0$.

D'où : f est de carré moyennable et sa moyenne quadratique est nulle.

On peut le prouver aussi en utilisant la question (I - 4 - c - 2).

(d) Soit x une fonction de $\mathcal{B}$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Donc : $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x|^2(t) = 0$.

Et d'après la question (I - 4 - c - 2) : $|x|^2$ est moyennable et $M(|x|^2) = 0$.

c.à.d : x est de carré moyennable et sa moyenne quadratique est nulle.

2. Structure de l'ensemble $\mathcal{M}_2$.

(a) Question de cours.

(b) Question de cours.

(c) Soient x et y deux fonctions de $\mathcal{M}_2$, on a :

$$|M_T(|x|^2) - M_T(|y|^2)| \leq \frac{1}{T} \int_0^T ||x(t)|^2 - |y(t)|^2| dt = \frac{1}{T} \int_0^T |(|x(t)| - |y(t)|)| (|x(t)| + |y(t)|) dt.$$

Or : $|x(t)| + |y(t)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ et : $|(|x(t)| - |y(t)|)| \leq |x(t) - y(t)| \leq \|x - y\|_\infty$.

$$\text{Donc : } |M_T(|x|^2) - M_T(|y|^2)| \leq \frac{1}{T} \int_0^T (\|x\|_\infty + \|y\|_\infty) \|x - y\|_\infty dt = (\|x\|_\infty + \|y\|_\infty) \|x - y\|_\infty.$$

(d) Supposons que $\mathcal{M}_2$ est stable par combinaison linéaire.

Puisque : $x_0 \in \mathcal{M}_2$ et $U \in \mathcal{M}_2$ (évident).

Alors : $y = x_0 + U \in \mathcal{M}_2$ et $y = x_0 + iU \in \mathcal{M}_2$.

c.à.d : $|y|^2 \in \mathcal{M}_1$ et $|z|^2 \in \mathcal{M}_1$.

D'où : $\frac{1}{2}(|y|^2 - |z|^2) \in \mathcal{M}_1$, car $\mathcal{M}_1$ est stable par combinaison linéaire.

Un calcul élémentaire, montre que : $x_0 = \frac{1}{2}(|y|^2 - |z|^2)$.

Donc : $x_0 \in \mathcal{M}_1$, ceci est absurde.

Ainsi : l'ensemble $\mathcal{M}_2$ n'est pas stable par combinaison linéaire.

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{M}_2$ n'est pas un espace vectoriel.

3. Fonctions comparables.

Notons que deux fonctions x et y de $\mathcal{M}_2$ sont comparables si, et seulement si, la fonction xy^* est moyennable et on a : $\langle x, y \rangle = M(xy^*)$.

(a) Soient x et y deux fonctions de $\mathcal{M}_2$ telles que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$:

$\alpha x + \beta y \in \mathcal{M}_2$.

(a-1) On a : $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + (xy^* + x^*y) = |x|^2 + |y|^2 + 2\text{Re}(xy^*)$: évident.

(a-2) On a : $|x + iy|^2 = |x|^2 + |y|^2 + i(x^*y + xy^*) = |x|^2 + |y|^2 - 2\text{Im}(xy^*)$: évident.

(a-3) D'après les deux questions précédentes :

$$xy^* = \frac{1}{2} [|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2 + i(|x + iy|^2 - |x|^2 - |y|^2)].$$

Comme : $x + y, x + iy, x$ et y sont dans $\mathcal{M}_2$.

Alors : $|x + y|^2, |x + iy|^2, |x|^2$ et $|y|^2$ sont moyennables.

Donc : xy^* est moyennable c.à.d : x et y sont comparables.

En intégrant $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\text{Re}(xy^*)$, on obtient :

$$M_T(|x + y|^2) = M_T(|x|^2) + M_T(|y|^2) + 2M_T(xy^*).$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on ait :

$$M(|x + y|^2) = M(|x|^2) + M(|y|^2) + 2\text{Re}(\langle x, y \rangle).$$

(b) Si x et y sont orthogonales dans $\mathcal{M}_2$, on a :

$$M_T(|\alpha x + \beta y|^2) = |\alpha|^2 M_T(|x|^2) + |\beta|^2 M_T(|y|^2) + 2\alpha\bar{\beta} M_T(xy^*)$$

$$\text{et } \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(xy^*) = \langle x, y \rangle = 0.$$

Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(|\alpha x + \beta y|^2) = |\alpha|^2 M(|x|^2) + |\beta|^2 M(|y|^2)$ existe.

Donc : $\alpha x + \beta y \in \mathcal{M}_2$ et $M(|\alpha x + \beta y|^2) = |\alpha|^2 M(|x|^2) + |\beta|^2 M(|y|^2)$.

(c) D'après la question précédente : $M(|x + y|^2) = M(|x|^2) + M(|y|^2)$.

C'est le théorème de Pythagore.

(d) Si $\omega_1 \neq \omega_2$, on a pour tout $T > 0$:

$$M_T(e_{\omega_1} e_{\omega_2}^*) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp(i(\omega_1 - \omega_2)t) dt = \left[\frac{1}{(\omega_1 - \omega_2)T} \exp(i(\omega_1 - \omega_2)t) \right]_0^T.$$

$$\text{Donc : } M_T(e_{\omega_1} e_{\omega_2}^*) = \frac{\exp(i(\omega_1 - \omega_2)T) - 1}{(\omega_1 - \omega_2)T}.$$

$$\text{D'où : } |M_T(e_{\omega_1} e_{\omega_2}^*)| \leq \frac{2}{|\omega_1 - \omega_2|T}.$$

$$\text{Or : } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2}{|\omega_1 - \omega_2|T} = 0.$$

$$\text{Donc : } \langle x, y \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(e_{\omega_1} e_{\omega_2}^*) = 0.$$

Par suite : e_{ω_1} et e_{ω_2} sont orthogonales.

On peut montrer que si x et y sont comparables, alors ¹ :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{M(|x|^2)} \sqrt{M(|y|^2)}$$

4. Propriétés de l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

¹c'est ce qu'on appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(a) Notons que $(\alpha x)^* = \bar{\alpha}x^*$.

(a-1) Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$M_T((\alpha x_1 + \beta x_2)y^*) = M_T(\alpha x_1 y^* + \beta x_2 y^*) = \alpha M_T(x_1 y^*) + \beta M_T(x_2 y^*).$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle.$$

(a-2) Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$M_T(x(\alpha y_1 + \beta y_2)^*) = M_T(\bar{\alpha}x y_1^* + \bar{\beta}x y_2^*) = \bar{\alpha}M_T(x y_1^*) + \bar{\beta}M_T(x y_2^*).$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x, y_2 \rangle.$$

(b) **Généralisation par récurrence.**

(b-1) On montre par récurrence que : $\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle x_k, y \rangle$.

(b-2) On montre par récurrence que : $\langle x, \sum_{k=1}^n \beta_k y_k \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{\beta}_k \langle x, y_k \rangle$.

(c) On a :

$$\langle x, x \rangle = \langle \sum_{k=1}^n c_k e_{\omega_k}, \sum_{j=1}^n c_j e_{\omega_j} \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle e_{\omega_k}, \sum_{j=1}^n c_j e_{\omega_j} \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \bar{c}_j \langle e_{\omega_k}, e_{\omega_j} \rangle.$$

$$\text{D'où : } \langle x, x \rangle = \sum_{k \neq j} c_k \bar{c}_j \langle e_{\omega_k}, e_{\omega_j} \rangle + \sum_{k=1}^n c_k \bar{c}_k \langle e_{\omega_k}, e_{\omega_k} \rangle.$$

$$\text{Or : } k \neq j \Rightarrow \langle e_{\omega_k}, e_{\omega_j} \rangle = 0 \text{ et } \langle e_{\omega_k}, e_{\omega_k} \rangle = M(|e_{\omega_k}|^2) = 1.$$

$$\text{Donc : } \langle x, x \rangle = M(|x|^2) = \sum_{k=1}^n |c_k|^2.$$

Partie III : Fonction de corrélation.

1. Exemples de fonctions stationnaires.

(a) Soit x une fonction constante, égale à c , alors $x.(x_\tau)^*$ est constante égale à $|c|^2$, pour tout réel τ .

Donc : $M_T(x.(x_\tau)^*) = |c|^2$, pour tous réels τ et T .

D'où : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x.(x_\tau)^*) = |c|^2$ existe, pour tout réel τ .

c.à.d : x est stationnaire et $\gamma_x(\tau) = |c|^2$, pour tout réel τ .

Notons que γ_x est aussi constante.

(b) Si $\omega = 0$, alors e_0 est constante égale à 1.

Donc : elle est stationnaire γ_{e_0} est constante égale à 1.

Supposons que $\omega \neq 0$, pour tous réels τ et T :

$$M_T(e_\omega.(e_\omega)_\tau^*) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega t} \overline{e^{i\omega(t-\tau)}} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega \tau} dt = e^{i\omega \tau}.$$

Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(e_\omega.(e_\omega)_\tau^*) = e^{i\omega \tau}$ existe, pour tout réel τ .

Par suite : e_ω est stationnaire et sa fonction de corrélation $\gamma_{e_\omega} = e_\omega$.

(c) On remarque que x est stationnaire si, et seulement si, $x.(x_\tau)^*$ est moyennable.

$$\text{On a : } x.(x_\tau)^*(t) = \left(\sum_{k=1}^n c_k e^{i\omega_k t} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \bar{c}_j e^{i\omega_j(\tau-t)} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \bar{c}_j e^{i\omega_j \tau} \cdot e^{i(\omega_k - \omega_j)t}$$

est moyennable, car c'est une combinaison linéaire de fonctions moyennables.

Ainsi : x est stationnaire, et on a :

$$M_T(x.(x_\tau)^*) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \bar{c}_j e^{i\omega_j \tau} \cdot e^{i(\omega_k - \omega_j)t} dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \bar{c}_j e^{i\omega_j \tau} M_T(e_{\omega_k - \omega_j}).$$

On a vu que si $\omega_k - \omega_j \neq 0 : M(e_{\omega_k - \omega_j}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(e_{\omega_k - \omega_j}) = 0$ et que $M(e_0) = 1$.

Donc si on fait tendre T vers $+\infty$, on obtient, pour tout réel τ :

$$\gamma_x(\tau) = M(x.(x_\tau)^*) = \sum_{k=1}^n c_k \overline{c_k} e^{i\omega_k \tau} = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 e^{i\omega_k \tau}.$$

2. Propriétés.

(a) Soit x une fonction stationnaire, pour $\tau = 0$, on a : $x_\tau = x$.

Donc : $x.(x_\tau)^* = |x|^2$.

Or : $M(|x|^2) = M(x.(x_\tau)^*) = \gamma_x(0)$ existe, car x est stationnaire.

Donc : x est de carré moyennable.

(b) Soient $\tau \in \mathbb{R}$ et $T > 0$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|M_T(x.(x_\tau)^*)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \overline{x_\tau(t)} dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| |x_\tau(t)| dt \leq \frac{1}{T} \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |x_\tau(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc : } |M_T(x.(x_\tau)^*)| \leq \left(\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |x_\tau(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc : } |M_T(x.(x_\tau)^*)| \leq (M_T(|x|^2))^{\frac{1}{2}} (M_T(|x_\tau|^2))^{\frac{1}{2}}$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient, pour tout réel τ :

$$|\gamma_x(\tau)| \leq (M(|x|^2))^{\frac{1}{2}} (M(|x_\tau|^2))^{\frac{1}{2}} = M(|x|^2) = \gamma_x(0)$$

Car : $M(|x_\tau|^2) = M(|x|^2)$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

(c) Notons que si $f \in \mathcal{B}$, a et b réels : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \overline{f(t)} dt$.

En particulier : $\overline{M_T(f)} = M_T(\overline{f}) = M_T(f^*)$.

On considère un réel τ :

$$\gamma_x^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{M_T(x.(x_\tau)^*)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(\overline{x.(x_\tau)^*}) = M_T(x^*.x_\tau)$$

C.à.d :

$$\gamma_x^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) x(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} x^*(s + \tau) x(s) ds.$$

D'après la relation de Chasles :

$$\gamma_x^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\tau}^0 x(s) x^*(s + \tau) ds + \frac{1}{T} \int_0^T x(s) x^*(s + \tau) ds + \frac{1}{T} \int_T^{T-\tau} x(s) x^*(s + \tau) ds \right).$$

Puisque, pour $T > 0$: $\left| \frac{1}{T} \int_{-\tau}^0 x(s) x^*(s + \tau) ds \right| \leq \frac{|\tau| \cdot \|x\|_\infty^2}{T}$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\tau| \cdot \|x\|_\infty^2}{T} = 0$.

Alors : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^0 x(s) x^*(s + \tau) ds = 0$.

De même : $\left| \frac{1}{T} \int_T^{T-\tau} x(s) x^*(s + \tau) ds \right| \leq \frac{|\tau| \cdot \|x\|_\infty^2}{T} = 0$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\tau| \cdot \|x\|_\infty^2}{T} = 0$.

Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(s) x^*(s + \tau) ds = 0$.

Par suite : $\gamma_x^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(s) x^*(s + \tau) ds = \gamma_x(-\tau)$.

(d) Soient ω et τ deux réels :

$$M_T(y.(y_\tau)^*) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega t} x(t) e^{i\omega(\tau-t)} x^*(t - \tau) dt = \frac{e^{i\omega\tau}}{T} \int_0^T x(t) x^*(t - \tau) dt$$

Donc : $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(y.(y_\tau)^*) = e^{i\omega\tau} \gamma_x(\tau)$.

Par suite : y est stationnaire et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\gamma_y(\tau) = \gamma_x(\tau) e^{i\omega\tau}.$$

(e) Soit z une fonction 1-périodique dans $\mathcal{B}$.

On vérifie facilement que les fonctions z_τ , $(z_\tau)^*$, et $z.(z_\tau)^*$ sont 1-périodique et sont dans $\mathcal{B}$.

Et d'après $(I - 4 - a - 4) : z.(z_\tau)^*$ est moyennable et on a :

$$\gamma_z(\tau) = M(z.(z_\tau)^*) = \int_0^1 z(t).z^*(t - \tau)dt \text{ existe.}$$

Donc : z est stationnaire et pour tout réel τ :

$$\gamma_z(\tau + 1) = \int_0^1 z(t).z^*(t - \tau - 1)dt = \int_0^1 z(t).z^*(t - \tau)dt = \gamma_z(\tau).$$

Ainsi : γ_z est aussi 1-périodique.

3. Coefficients de Fourier complexes.

(a) Calculs préliminaires.

(a-1) On a : $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$.

Et on a : $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$.

(a-2) On a : $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$.

Et on a : $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$.

(a-3) On a : $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$.

Et on a : $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$.

(a-4) On a : $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$.

(b) Les fonctions x, y et z sont continues sur $\mathbb{R}$, 1-périodiques et bornées.

Donc elles appartiennent à $\mathcal{B}$.

(c) Calcul des coefficients de Fourier.

(c-1) Coefficients de Fourier de la fonction x :

Tout calcul fait, et en utilisant $(III - 3 - a - 3)$ et $(III - 3 - a - 4)$, on trouve :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} : a_k = 0; \quad a_{-1} = \frac{1}{2}; \quad a_1 = \frac{-1}{2}.$$

(c-2) Coefficients de Fourier de la fonction y :

De même on trouve :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} : a_k = 0; \quad a_{-1} = \frac{1}{2}; \quad a_1 = \frac{1}{2}.$$

(c-3) Coefficients de Fourier de la fonction z :

De même on trouve :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} : a_k = 0; \quad a_1 = 1.$$

(d) Fonctions de corrélation.

(d-1) D'après $(I - 2 - b - 1)$ et pour $\omega = 2\pi$, on trouve :

$$M_T(z) = \frac{e^{i\pi T} \sin(\pi T)}{\pi T}.$$

Par identification de parties réelles et parties imaginaires, on trouve :

$$M_T(x) = \frac{\sin^2(\pi T)}{\pi T}.$$

$$M_T(y) = \frac{\cos(\pi T) \sin(\pi T)}{\pi T} = \frac{\sin(2\pi T)}{2\pi T}.$$

(d-2) Soient $T > 0$ et τ un réel, on a :

$$M_T(x.(x_\tau)^*) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi t) \sin(2\pi t - 2\pi\tau) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T (\cos(2\pi\tau) - \cos(4\pi t - 2\pi\tau)) dt$$

$$M_T(x.(x_\tau)^*) = \frac{1}{2T} \left(T \cos(2\pi\tau) - \frac{1}{4\pi} [\sin(4\pi t - 2\pi\tau)]_0^T \right)$$

$$\text{Donc : } M_T(x.(x_\tau)^*) = \frac{\cos(2\pi\tau)}{2} - \frac{\sin(4\pi T - 2\pi\tau)}{8\pi T} - \frac{\sin(2\pi\tau)}{8\pi T}.$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}; \quad \gamma_x(\tau) = \frac{\cos(2\pi\tau)}{2}$$

(d-3) Soient $T > 0$ et τ un réel, on a :

$$M_T(y.(y_\tau)^*) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi t) \cos(2\pi t - 2\pi\tau) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T (\cos(2\pi\tau) + \cos(4\pi t - 2\pi\tau)) dt$$

$$M_T(y.(y_\tau)^*) = \frac{1}{2T} \left(T \cos(2\pi\tau) + \frac{1}{4\pi} [\sin(4\pi t - 2\pi\tau)]_0^T \right)$$

$$\text{Donc : } M_T(y.(y_\tau)^*) = \frac{\cos(2\pi\tau)}{2} + \frac{\sin(4\pi T - 2\pi\tau)}{8\pi T} + \frac{\sin(2\pi\tau)}{8\pi T}.$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}; \quad \gamma_y(\tau) = \frac{\cos(2\pi\tau)}{2}$$

(d-4) Notons que $z = e_{2\pi}$, donc d'après la question (III - 1 - b) :

$$\gamma_z = \gamma_{e_{2\pi}} = e_{2\pi} = z.$$

(e) Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\omega - 2\pi k \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ainsi :

$$a_k = \int_0^1 e^{i(\omega - 2\pi k)t} dt = \frac{e^{i(\omega - 2\pi k)T} - 1}{i(\omega - 2\pi k)}.$$

Donc :

$$a_k = \frac{2 \sin((\omega - 2\pi k) \frac{T}{2})}{\omega - 2\pi k} e^{i(\omega - 2\pi k) \frac{T}{2}}.$$

FIN