

LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé n°2-T- n°1
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

22/11/2008

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties dépendantes.
Il est extrait du concours **Centrale-Supelec-2005-MP-mathématiques 1**.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

1 Problème.

On dira qu'une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ est continue par morceaux, si elle est continue sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ sauf peut être en un nombre fini de points de $[a, b]$, où elle admet des limites finies à droite et à gauche.

On admet que la somme (respectivement le produit) de deux fonctions continues par morceaux, est continue par morceaux.

Dans tout ce problème $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des fonctions bornées continues par morceaux de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, on note $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$, et si $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sont les points de discontinuité de x sur le segment $[a, b]$, on rappelle que :

$$\int_a^b x(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t)dt.$$

Une telle intégrale possède toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue, en particulier :

- (i) La propriété de linéarité.
- (ii) $\left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq \int_a^b |x(t)|dt$, si $a \leq b$.
- (iii) $\left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b-a)\|x\|_\infty$, si $a \leq b$.

Partie I : Fonctions moyennables.

Pour tout $x \in \mathcal{B}$, on appelle moyenne de x , s'il existe le nombre complexe :

$$M(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x) \quad \text{avec} \quad M_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt.$$

On dira, dans ce cas que la fonction x est moyennable.

Et on notera $\mathcal{M}_1$ l'ensemble des fonctions moyennables appartenant à $\mathcal{B}$.

1. Étude préliminaire.

Soient x, y deux éléments de $\mathcal{M}_1$, α et β deux nombres complexes donnés.

- (a)- Montrer que $M_T(\alpha x + \beta y) = \alpha M_T(x) + \beta M_T(y)$.
- (b)- Montrer que $\alpha x + \beta y \in \mathcal{M}_1$ et que $M(\alpha x + \beta y) = \alpha M(x) + \beta M(y)$.¹
- (c)- Montrer que $|M_T(x) - M_T(y)| \leq \|x - y\|_\infty$.
- (d)- En déduire que $|M(x) - M(y)| \leq \|x - y\|_\infty$.

On dira que les fonctions M_T et M sont lipchitziennes pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

- (e)- Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on définit la fonction x_τ par : $x_\tau(t) = x(t - \tau)$.

(e-1) Montrer que $M_T(x_\tau) = M_T(x) + \frac{1}{T} \int_{-\tau}^0 x(s) ds + \frac{1}{T} \int_T^{T-\tau} x(s) ds$.

Indication : utiliser le changement de variable $s = t - \tau$, puis la relation de Chasles.

(e-2) Vérifier que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^0 x(s) ds = 0$.

(e-3) Montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_T^{T-\tau} x(s) ds = 0$.

(e-4) Montrer que x_τ est moyennable et que $M(x) = M(x_\tau)$.

- (f)- Montrer que pour tout $n \geq 2$, toutes fonctions $x_1, x_2, \dots, x_n$ moyennables et tous complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ alors $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ est moyennable et on a :

$$M \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k M(x_k).$$

2. Un premier exemple.

Pour tout réel ω , on définit la fonction $e_\omega : t \mapsto e^{i\omega t}$.

- (a) **Dérivées nèmes de e_ω .**

(a-1) Dire pourquoi la fonction e_ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$?

(a-2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel t , on a :

$$e_\omega^{(n)}(t) = (i\omega)^n e^{i\omega t}.$$

(a-3) Préciser les valeurs de $e_\omega^{(2n)}(t)$ et $e_\omega^{(2n+1)}(t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel t .

(a-4) En déduire les dérivées d'ordre $2n$ et $2n+1$ de la fonction $\sin$.

(a-5) En déduire les dérivées d'ordre $2n$ et $2n+1$ de la fonction $\cos$.

(a-6) Rappeler la formule de Leibniz.

(a-7) Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $f : t \mapsto t^2 e_\omega(t)$.

- (b) **Moyenne de e_ω .**

(b-1) Montrer que si ω est non nul, alors :

$$M_T(e_\omega) = \frac{i(1 - e^{i\omega T})}{\omega T} = \frac{2e^{\frac{i\omega T}{2}} \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega T}.$$

(b-2) Montrer que si ω est non nul, alors e_ω est moyennable et que $M(e_\omega) = 0$.

(b-3) Déterminer $M_T(\sin)$ et $M_T(\cos)$.

(b-4) En déduire que $\sin$ et $\cos$ sont moyennables et donner $M(\sin)$ et $M(\cos)$.

(b-5) Montrer que e_0 est moyennable et que $M(e_0) = 1$.

- (c) Montrer que la fonction e_1 est 2π -périodique.

Admet-elle des limites en $+\infty$ et en $-\infty$?

- (d) Montrer que la fonction e_ω est périodique, tout en précisant sa période.

Admet-elle des limites en $+\infty$ et en $-\infty$?

¹Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{M}_1$ est un espace vectoriel.

3. Exemple d'une fonction non moyennable.

On considère la fonction x_0 définie par :

$$\begin{cases} x_0(t) = e^{i \ln(t+1)} & \text{si } t > 0 \\ x_0(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Vérifier que $x_0 \in \mathcal{B}$.
- (b) Montrer, en utilisant une intégration par parties que, pour tout $T > 0$:

$$M_T(x_0) = e^{i \ln(T+1)} - \frac{i}{T} \int_0^T \frac{t e^{i \ln(t+1)}}{t+1} dt.$$

- (c) Montrer, en utilisant le changement de variable $s = \ln(t+1)$, que :

$$M_T(x_0) = \frac{T+1}{(i+1)T} e^{i \ln(T+1)} - \frac{1}{(i+1)T}.$$

- (d) Calculer $\lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x_0)$, puis en déduire que x_0 n'est pas moyennable.

4. Cas particuliers.

- (a) Soit x une fonction continue non constante de $\mathcal{B}$, périodique de période $P > 0$.
 - (a-1) Montrer que x n'admet pas de limite en $+\infty$.
 - (a-2) Montrer que x n'admet pas de limite en $-\infty$.
 - (a-3) Montrer que pour tout réel a : $\int_a^{a+P} x(t) dt = \int_0^P x(t) dt$.
 - (a-4) En déduire que x est moyennable et donner sa moyenne.
- (b) Montrer qu'une fonction constante est moyennable et donner sa moyenne.
- (c) Soit x une fonction de $\mathcal{B}$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c$, où c est un complexe.
 - (c-1) Rappeler la définition concernant cette limite.
 - (c-2) Montrer que x est moyennable et que sa moyenne est $M(x) = c$.
 - (c-3) Montrer que $f : t \mapsto \frac{e_{\omega}(t)}{t+i}$ est moyennable et donner sa moyenne.

Partie II : Fonctions de carré moyennable.

On dira que la fonction $x \in \mathcal{B}$ est de carré moyennable si la fonction réelle $T \mapsto M_T(|x|^2)$ admet une limite finie lorsque $T \rightarrow +\infty$.

Dans ce cas, on appelle moyenne quadratique de x le réel positif :

$$M(|x|^2) = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(|x|^2).$$

Et on notera $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des fonctions de carré moyennable appartenant à $\mathcal{B}$.

1. Étude de quelques exemples.

- (a) Vérifier qu'une fonction constante est de carré moyennable et donner sa moyenne quadratique.
- (b) Vérifier que les fonctions e_{ω} et x_0 sont de carré moyennable et donner leur moyennes quadratiques.
- (c) Montrer $f : t \mapsto \frac{e_{\omega}(t)}{t+i}$ est de carré moyennable et donner sa moyenne quadratique.
- (d) Soit x une fonction de $\mathcal{B}$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, prouver que x est de carré moyennable et que sa moyenne quadratique est nulle.

2. Structure de l'ensemble $\mathcal{M}_2$.

- (a) Énoncer la formule de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
- (b) Utiliser l'inégalité triangulaire et montrer que pour tous complexes z_1 et z_2 :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

(c) Soient x et y deux fonctions de $\mathcal{M}_2$, montrer que :

$$|M_T(|x|^2) - M_T(|y|^2)| \leq (\|x\|_\infty + \|y\|_\infty) \|x - y\|_\infty.$$

(d) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_2$ n'est pas stable par combinaison linéaire.

Indication : Utiliser les fonctions x_0 et U qui est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \\ U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{M}_2$ n'est pas un espace vectoriel.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

3. Fonctions comparables.

Pour $x \in \mathcal{M}_2$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $x^* : t \mapsto \overline{x(t)}$.

On dira que deux fonctions x et y de $\mathcal{M}_2$ sont comparables si la limite suivante existe dans $\mathbb{C}$:

$$\langle x, y \rangle = M(xy^*) = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(xy^*)$$

Dans le cas particulier où $\langle x, y \rangle = 0$, on dira que x et y sont orthogonales.

(a) Soient x et y deux fonctions de $\mathcal{M}_2$ telles que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$:

$\alpha x + \beta y \in \mathcal{M}_2$.

(a-1) Montrer que $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\operatorname{Re}(xy^*)$.

(a-2) Montrer que $|x + iy|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\operatorname{Im}(xy^*)$.

(a-3) En déduire que x et y sont comparables et qu'on a :

$$M(|x + y|^2) = M(|x|^2) + M(|y|^2) + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle).$$

(b) Soient x et y deux fonctions orthogonales de $\mathcal{M}_2$. Montrer que si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, alors $\alpha x + \beta y \in \mathcal{M}_2$.

(c) Que vaut $M(|x + y|^2)$ dans ce dernier cas ?

(d) Montrer que si ω_1 et ω_2 sont deux réels distincts, alors les fonctions e_{ω_1} et e_{ω_2} sont orthogonales.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

On peut montrer que si x et y sont comparables, alors ² :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{M(|x|^2)} \sqrt{M(|y|^2)}$$

4. Propriétés de l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On considère $x, y, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des éléments de $\mathcal{M}_2$ et $(\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^{2n+2}$.

(a) On suppose l'existence des limites utilisées dans les quatre questions suivantes.

(a-1) Montrer que $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$.

(a-2) Montrer que $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x, y_2 \rangle$.

(b) **Généralisation par récurrence.**

(b-1) Montrer que $\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle x_k, y \rangle$.

(b-2) Montrer que $\langle x, \sum_{k=1}^n \beta_k y_k \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{\beta}_k \langle x, y_k \rangle$.

²c'est ce qu'on appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- (c) On considère la fonction $x = \sum_{k=1}^n c_k e_{\omega_k}$, où n est un entier naturel non nul, $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont des nombres complexes et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer, en utilisant la question (II-3-d) que :

$$\langle x, x \rangle = M(|x|^2) = \sum_{k=1}^n |c_k|^2.$$

Partie III : Fonction de corrélation.

Pour toute fonction $x \in \mathcal{B}$, on définit la fonction de corrélation de x , qu'on note γ_x par :
 Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $\gamma_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} M_T(x.(x_\tau)^*)$, à condition que cette limite existe dans $\mathbb{C}$.

Si $\gamma_x(\tau)$ existe pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on dira que la fonction x est stationnaire.

1. Exemples de fonctions stationnaires.

- (a) Montrer qu'une fonction constante, égale à c , est stationnaire et que sa fonction de corrélation est aussi constante égale à $|c|^2$.
 (b) Montrer que si ω est un réel, alors la fonction e_ω est stationnaire et donner sa fonction de corrélation.
 (c) On reprend ici les hypothèses et notations de la question (II-4-c). Montrer que la fonction $x = \sum_{k=1}^n c_k e_{\omega_k}$ est stationnaire et donner sa fonction de corrélation.
 Indication : utiliser la question (II-3-d).

2. Propriétés.

On considère une fonction stationnaire x .

- (a) Montrer que x est de carré moyennable.
 (b) Montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0)$.
 (c) Montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $\gamma_x(-\tau) = (\gamma_x)^*(\tau)$.
 (d) Montrer que si ω est un réel, alors la fonction $y = e_\omega.x$ est stationnaire et que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\gamma_y(\tau) = \gamma_x(\tau) e^{i\omega\tau}.$$

- (e) Soit z une fonction 1-périodique (de période égale à 1) appartenant à $\mathcal{B}$, montrer que z est stationnaire et que sa fonction de corrélation γ_z est aussi 1-périodique.

3. Coefficients de Fourier complexes.

Pour toute fonction 1-périodique $x \in \mathcal{B}$ et tout entier relatif k , on pose :

$$a_k = \int_0^1 x(t) e^{-2i\pi kt} dt.$$

Les a_k sont appelés les coefficients de Fourier complexes de la fonction x .

On considère les fonctions $x : t \mapsto \sin(2\pi t)$; $y : t \mapsto \cos(2\pi t)$ et $z : t \mapsto e^{2i\pi t}$.

(a) Calculs préliminaires.

- (a-1) Exprimer $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
 (a-2) Exprimer $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
 (a-3) En déduire les expressions respectives de $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
 (a-4) En déduire l'expression de $\sin(a)\cos(b)$ en fonction de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.
 (b) Montrer que les fonctions x, y et z sont 1-périodiques et appartiennent à $\mathcal{B}$.

(c) Calcul des coefficients de Fourier.

- (c-1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction x .
 (c-2) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction y .

- (c-3) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction z .
- (d) **Fonctions de corrélation.**
 - (d-1) Calculer $M_T(z)$, puis par identification de parties réelles et parties imaginaires, en déduire $M_T(x)$ et $M_T(y)$.
 - (d-2) Calculer γ_x .
 - (d-3) Calculer γ_y .
 - (d-4) Calculer γ_z .
- (e) Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, calculer les coefficients de Fourier de la fonction e_ω .

FIN