LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°1$-T- $n°1$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

11/10/2008

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties dépendantes.
La première partie étudie quelques propriétés de l'ensemble de parties d'un ensemble non vide.
La deuxième partie traite la notion de filtre sur un ensemble et ses propriétés.
La troisième partie traite le cas particulier des ultrafiltres.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

Dans tout ce problème E désigne un ensemble non vide donné.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de cet ensemble E, et on rappelle que :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Pour toute partie A de E, on note χ_A l'application caractéristique de A, qui est définie de E vers $\{0,1\}$ par :

$$\chi_A(x) = 1 \quad si \quad x \in A \quad et \quad \chi_A(x) = 0 \quad si \quad x \notin A.$$

Partie I :L'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

1. **Itéré nème de $\mathcal{P}(E)$.**
   On note $\mathcal{P}_{(0)}(E) = E$; $\mathcal{P}_{(1)}(E) = \mathcal{P}(E)$; $\mathcal{P}_{(2)}(E) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{P}_{(n)}(E) = \mathcal{P}(\mathcal{P}_{(n-1)}(E))$.
   (a)- Justifier pourquoi l'ensemble $\mathcal{P}_{(n)}(E)$ est non vide, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b)- Laquelle de ces deux assertions est vraie :

   $$\mathcal{P}_{(n-1)}(E) \subset \mathcal{P}_{(n)}(E) \quad ou \quad bien \quad \mathcal{P}_{(n-1)}(E) \in \mathcal{P}_{(n)}(E)?$$

   Justifier votre réponse.
   (c)- Déterminer $\mathcal{P}_{(n)}(\emptyset)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d)- Déterminer $\mathcal{P}_{(n)}(E)$ dans chacun des cas suivants :

(d-1) $E = \{a\}$ est un singleton et $n \in [|0, 3|]$.
(d-2) $E = \{a, b\}$ et $n \in [|0, 2|]$.

(e)- Si l'ensemble E est fini de cardinal n, alors quel est le cardinal de $\mathcal{P}_{(n)}(E)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

2. **Opérations dans $\mathcal{P}(E)$.**
On considère A et B deux parties de E.
(a) Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
(b) Comparer $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
(c) Comparer $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
(d) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, et toutes parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de E :

$$\mathcal{P}(\cap_{k=1}^{n} A_k) = \cap_{k=1}^{n} \mathcal{P}(A_k).$$

3. **Images directe et réciproque.**
Soient f une application de E dans lui même, A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.
(a) Montrer que $f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$.
(b) Comparer $f(A \triangle B)$ et $f(A) \triangle f(B)$.
(c) Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties X et Y de E, on a :$f(X \triangle Y) = f(X) \triangle f(Y)$.
(d) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.
(d-1) Montrer que $f^{-1}(\cap_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.
(d-2) Montrer que $f^{-1}(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.
(d-3) Montrer que $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$.
(d-4) Comparer $f(\cap_{i \in I} A_i)$ et $\cap_{i \in I} f(A_i)$. A quelle condition sur f a-t-on l'égalité ?

4. **Applications dans $\mathcal{P}(E)$.**

(a) Rappeler la définition :
(a-1) d'une application injective.
(a-2) d'une application surjective.
(a-3) d'une application bijective.
(a-4) d'une application involutive.
(b) Montrer que l'application φ suivante est bijective :

$$\begin{array}{c} \varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ A \mapsto C_E^A \end{array}$$

(c) Montrer que l'application ϕ suivante est bijective :

$$\begin{array}{c} \phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \\ A \mapsto \chi_A \end{array}$$

(d) On considère $a \in E$, on définit l'application ψ par :

$$\begin{array}{c} \psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ A \mapsto \psi(A) \end{array}$$

Avec :

$$\psi(A) = A \setminus \{a\} \quad si \quad a \in A \quad et \quad \psi(A) = A \cup \{a\} \quad si \quad a \notin A.$$

(d-1) Donner les valeurs de $\psi(\emptyset), \psi(\{a\}), \psi(E \setminus \{a\})$ et $\psi(E)$.
(d-2) Montrer que l'application ψ est bijective. Est-elle involutive ?
On suppose ici que E est fini de cardinal $n \geq 1$, et on note :

$\mathcal{P}^{(0)}(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair.
Et $\mathcal{P}^{(1)}(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair.
On définit l'application θ par :

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{P}^{(0)}(E) &\to \mathcal{P}^{(1)}(E) \\ A &\mapsto \theta(A) = \psi(A) \end{aligned}$$

(d-3) Montrer que θ est bien définie.
(d-4) Montrer que θ est bijective, puis en déduire que $\mathcal{P}^{(0)}(E)$ et $\mathcal{P}^{(1)}(E)$ ont le même cardinal.
(d-5) En déduire que $card(\mathcal{P}^{(0)}(E)) = card(\mathcal{P}^{(1)}(E)) = 2^{n-1}$.

(e) Soient X et Y deux parties non vides de E, on définit l'application μ par :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A &\mapsto (A \cap X, A \cap Y) \end{aligned}$$

(e-1) Rappeler la définition d'une partition de E.
On suppose ici que X et Y forment une partition de E.
(e-2) Montrer que μ est bien définie.
(e-3) Montrer que μ est bijective.
(e-4) Donner les valeurs de $\mu(\emptyset), \mu(X), \mu(Y)$ et $\mu(E)$.

Partie II : Filtres sur E.

On appelle filtre sur E tout ensemble non vide $\mathcal{F}$ de parties de E vérifiant les trois axiomes suivants :
(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(ii) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{F}^2$: $A \cap B \in \mathcal{F}$.
(iii) Pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $M \in \mathcal{P}(E)$: $A \subset M \Rightarrow M \in \mathcal{F}$.
On dit que l'ensemble E est filtré par le filtre $\mathcal{F}$.

1. **Exemples de filtres.**
(a) Vérifier que $\mathcal{F} = \{E\}$ est un filtre sur E.
(b) Lequel des ensembles suivants est un filtre sur E :
(b-1) $\mathcal{P}(E)$?
(b-2) $\mathcal{F} = \{\emptyset, E\}$?
(b-3) $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$?
(c) Soit X une partie non vide de E, montrer que :
$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E)/X \subset A\}$ est un filtre sur E.
(d) On suppose ici que l'ensemble $E = \mathbf{N}$, montrer que :
$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})/C_{\mathbf{N}}^{A}\, est\, finie\}$ est un filtre sur $\mathbf{N}$.[1]

2. **Propriétés immédiates.**
Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E.
(a) Vérifier que $E \in \mathcal{F}$.
(b) Montrer que si $(A, B) \in \mathcal{F}^2$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$.
(c) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{F}^n$: $\cap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$.
(d) En déduire que pour tout $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{F}^n$, on a : $\cap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$.

3. **Comparaison des filtres.**
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux filtres sur E. On dit que $\mathcal{F}'$ est plus fine que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Si de plus $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$, on dit que $\mathcal{F}'$ est strictement plus fine que $\mathcal{F}$.
(a) Montrer que la relation "$\mathcal{F}'$ est plus fine que $\mathcal{F}$ " définit une relation d'ordre sur l'ensemble des filtres sur E.
Cet ordre est-il total ou partiel ?

[1] Ce filtre est dit filtre de Fréchet.

(b) Existe t-il un plus petit élément (filtre) pour cet ordre ?
(c) Existe t-il un plus grand élément (filtre) pour cet ordre ?
(d) Pour la relation "$\mathcal{F}'$ est strictement plus fine que $\mathcal{F}$ " définit-elle une relation d'ordre sur l'ensemble des filtres sur E ?

4. **Opérations sur les filtres.**
   (a) Montrer que l'intersection de deux filtres sur E est un filtre sur E.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, l'intersection de n filtres sur E est un filtre sur E.
   (c) La réunion de deux filtres sur E est-elle un filtre sur E ?
   (d) Si $\mathcal{F}$ un filtre sur E, l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{F}$ est-il un filtre sur E ?
   (e) Soient $\mathcal{F}$ un filtre sur E et A une partie de E telle que, pour tout $X \in \mathcal{F}$: $A \cap X \neq \emptyset$.
   Montrer que $\mathcal{F}_A = \{A \cap X / X \in \mathcal{F}\}$ est un filtre sur A.[2]

5. **Images d'un filtre par une bijection.**
   Soient f une application bijective de E vers lui même, et $\mathcal{F}$ un filtre sur E, on pose :

$$f(\mathcal{F}) = \{f(A)/A \in \mathcal{F}\};\ et\ f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A)/A \in \mathcal{F}\}.$$

   (a) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

   (b) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

$$f(A) = f(B) \Rightarrow A = B.$$

   (c) Montrer que $f(\mathcal{F})$ est un filtre sur E.
   (d) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un filtre sur E.
   (e) Si l'application f n'est pas bijective :
      (e-1) $f(\mathcal{F})$ est-il toujours un filtre sur E ?
      (e-2) $f^{-1}(\mathcal{F})$ est-il toujours un filtre sur E ? Justifier chacune de vos réponses.

Partie III : Ultrafiltres sur E.

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur E est un ultrafiltre (sur E) s'il n'existe aucun filtre distinct de $\mathcal{F}$ et plus fine que $\mathcal{F}$. C'est-à-dire que si $\mathcal{F}'$ est un filtre plus fine que $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

1. **Caractérisation d'un ultrafiltre.**
   Soient $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur E, A et B deux parties quelconques de E telles que $A \cup B \in \mathcal{F}$. On veut prouver dans cette question que $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.
   Supposons par l'absurde que $A \notin \mathcal{F}$ et $B \notin \mathcal{F}$, ainsi que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Posons alors :

$$\mathcal{F}' = \{M \in \mathcal{P}(E)/A \cup M \in \mathcal{F}\}.$$

   (a) Lequel des éléments A et B appartient à $\mathcal{F}'$?
   (b) Montrer que $\mathcal{F}'$ est un filtre sur E.
   (c) Montrer que $\mathcal{F}'$ est plus fine que $\mathcal{F}$.
   (d) Conclure.
   (e) Que peut-on dire de la réciproque ?
   (f) Énoncer avec précision le résultat démontré.

2. **Applications.**
   Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur E.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et toutes parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de E telles que $A_1 \cup A_2 \cup \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$, alors il existe $i \in [|1, n|]$ tel que $A_i \in \mathcal{F}$.

[2] $\mathcal{F}_A$ s'appelle le filtre induit par $\mathcal{F}$ sur A.

(b) En déduire que si $n \geq 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de E alors il existe $i \in [|1, n|]$ tel que $A_i \in \mathcal{F}$.
On suppose ici que $\mathcal{F}$ est seulement un filtre sur E.

(c) Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si, et seulement si pour toute partie A de E : $A \in \mathcal{F}$ ou $C_E^A \in \mathcal{F}$.

3. **Exemples.**

(a) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il un ultrafiltre sur E ?

(b) Soit $a \in E$, monter que $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E)/a \in A\}$ est un ultrafiltre sur E.

(c) Soient $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur E, et A une partie de E telle que, pour tout $X \in \mathcal{F}$: $A \cap X \neq \emptyset$.
l'ensemble $\mathcal{F}_A = \{A \cap X/X \in \mathcal{F}\}$ est-il un ultrafiltre sur A ?

4. **Images d'un ultrafiltre par une bijection.**
Soient f une application bijective de E vers lui même, et $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur E.

(a) $f(\mathcal{F})$ est-il un ultrafiltre sur E ?

(b) $f^{-1}(\mathcal{F})$ est-il un ultrafiltre sur E ?

(c) Si l'application f n'est pas bijective :

(c-1) $f(\mathcal{F})$ est-il toujours un ultrafiltre sur E ?

(c-2) $f^{-1}(\mathcal{F})$ est-il toujours un ultrafiltre sur E ?

Justifier chacune de vos réponses.

FIN