LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°1$-T- $n°2$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

17/12/2008

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties dépendantes. La partie I introduit la notion d'intégrales généralisées, sa cinquième question est extraite du **Centrale-Supelec-2003-MP-maths** I.
La partie II est extraite du concours **E3A-2005-MP-maths** A.
La partie III est extraite du concours **Centrale-Supelec-2003-PSI-Épreuve spécifique**.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

Partie I :Intégrales généralisées.

On considère a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, avec les éventualités $a = -\infty$ où $b = +\infty$.
Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(i) Si f est une fonction continue sur $]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si la limite suivante $\lim\limits_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$ existe et elle est finie.
Dans ce cas, on pose par définition : $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$.

(ii) Si f est une fonction continue sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si la limite suivante $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$ existe et elle est finie.
Dans ce cas, on pose par définition : $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$.

(iii) Si f est une fonction continue sur $]a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.
Dans ce cas, on pose par définition : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$, pour tout $c \in]a, b[$.
Dans les trois cas, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge, si elle ne converge pas.
On admet le résultat suivant : Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

1. **Premiers exemples.**
   (a)- Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge.
   (b)- Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$ diverge.

(c)- Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ converge.
N'oublier pas de calculer les valeurs de ces intégrales en cas de convergence.

(d)- **Exemples de référence.**
Soit α un réel fixé, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, pour tout réel $t > 0$.

(d-1) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t)dt$ converge si, et seulement si, le réel $\alpha < 1$.

(d-2) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

(d-3) Donner les valeurs du réel α pour lesquelles $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

(d-4) Étudier la nature de chacune des intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

2. **Règle de comparaison.**
Soient f et g deux fonctions continues positives sur $]a, b]$ telles que pour tout $t \in]a, b]$: $\quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

(a) Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge.

(b) En déduire que si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

(c) Énoncer des résultats similaires sur $[a, b[$ et sur $]a, b[$.

(d) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4+3}$ converge.

(e) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{t^2} dt$ diverge .

3. **Étude de deux fonctions.**
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t)dt; \quad G(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos(t)dt.$$

(a) Montrer que F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée F', puis vérifier que F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre un :

$$y'(x) - y(x) + \sin(x) = 0 \quad (*).$$

Indication : utiliser la relation de Chasles pour dériver la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t)dt$.

(c) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée G', puis vérifier que G est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre un :

$$y'(x) - y(x) + \cos(x) = 0 \quad (**).$$

.

(d) En déduire que F et G sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations $\quad (*)$ et $\quad (**)$.

Partie II : Une Équation différentielle d'ordre quatre.

On considère les équations différentielles suivantes :

$$y" + y = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

$$y" + y = \cos(x) \quad (\mathcal{E}_1)$$

$$y" + y = ch(x) \quad (\mathcal{E}_2)$$

$$y" + y = sh(x) \quad (\mathcal{E}_3)$$

où ch et sh désignent respectivement les fonctions cosinus et sinus hyperboliques.

1. **Résolution de** $(\mathcal{E}_0)$ **et** $(\mathcal{E}_1)$**.**

   (a) Résoudre $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$, qui tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, montrer que g est la fonction nulle.
   (c) **Problème de Cauchy.**

      (c-1) Résoudre $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.
      (c-2) Déterminer l'unique solution X de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions initiales :

      $$X(0) = 1 \quad et \quad X'(0) = 1.$$

      (c-3) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction X.
   (d) Soit $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on définit sur $\mathbb{R}$ l'application h_v par :

   $$h_v : x \mapsto (ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x)$$

   On note $V = \{h_v / v \in \mathbb{R}^4\}$ qui est inclus dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

   $$e_1 = (1, 0, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0, 0); e_3 = (0, 0, 1, 0); e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

      (d-1) Montrer V est stable par combinaison linéaire. [1]
      (d-2) Déterminer h_{e_k} pour $k \in [|1, 4|]$.
      (d-3) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a.h_{e_1} + b.h_{e_2} + c.h_{e_3} + d.h_{e_4} = 0$, montrer que $a = b = c = d = 0$.
      (d-4) Montrer que l'application $\begin{array}{c} h : \mathbb{R}^4 \to V \\ v \mapsto h_v \end{array}$ est bijective et qu'elle vérifie pour tous v, w dans $\mathbb{R}^4$ et tout réel α :

      $$h(\alpha v + w) = \alpha h(v) + h(w).$$

2. **Résolution de** $(\mathcal{E}_2)$ **et** $(\mathcal{E}_3)$**.**
   (a) On note $E = \{a\cos + b\sin + c.sh + d.ch / (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
      (a-1) Montrer que $a\cos + b\sin + c.sh + d.ch = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$.
      Il en résulte que $(\cos, \sin, ch, sh)$ est une base de E.
      (a-2) Résoudre $(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$.
      (a-3) Résoudre $(\mathcal{E}_3)$ sur $\mathbb{R}$.
      (a-4) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de l'unique solution Y de $(\mathcal{E}_2)$ vérifiant les conditions initiales :

      $$Y(0) = 1 \quad et \quad Y'(0) = 0.$$

   (b) **Application : Une équation d'ordre quatre.**
   On considère l'équation différentielle : $y^{(4)} = y \quad (H_1)$.
   Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$, on pose $g = f" + f$.
      (b-1) Montrer que f est solution de (H_1) si, et seulement si g est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.
      (b-2) Résoudre (H_2).
      (b-3) En déduire les solutions de (H_1).
      (b-4) De combien de conditions initiales -a-t-on besoin pour avoir une solution unique de (H_1) ?
      Énoncer avec précision une proposition donnant le résultat en question.

[1]En fait V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dont $\mathcal{B} = (h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4})$ est une base.

3. **Raccordement des solutions.**
Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$xy'(x) - ny(x) = 0 \quad (E_n).$$

(a) On suppose ici que $n = 1$.
   (a-1) Résoudre (E_1) sur $]-\infty, 0[$.
   (a-2) Résoudre (E_1) sur $]0, +\infty[$.
   (a-3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est alors, la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_1$?
(b) On suppose ici que $n \geq 2$.
   (b-1) Résoudre (E_n) sur $]-\infty, 0[$.
   (b-2) Résoudre (E_n) sur $]0, +\infty[$.
   (b-3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est alors, la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n$?
(c) Comparer les dimensions des espaces $\mathcal{S}_n$ et interpréter les résultats des questions (a) et (b) précédentes.

Partie III : Applications des équations différentielles.

Comme première application, on va calculer la valeur d'une intégrale généralisée.
On désigne par μ une application continue 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle : $(E_\mu) \quad y"(t) + y(t) = \mu(t)$.
On désigne par φ_μ la solution de (E_μ) sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions initiales $\varphi_\mu(0) = \varphi'_\mu(0) = 0$.
Pour tout réel x, on note :

$$G_\mu(x) = \int_0^x \mu(t)\cos(t)dt \quad et \quad H_\mu(x) = \int_0^x \mu(t)\sin(t)dt.$$

On désigne par F_μ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F_\mu(x) = (\sin x)G_\mu(x) - (\cos x)H_\mu(x)$.

1. **Propriétés de φ_μ.**
   (a) Justifier la dérivabilité des fonctions G_μ, H_μ et F_μ sur $\mathbb{R}$. Préciser $F_\mu(0)$ et $F'_\mu(0)$.
   (b) Montrer que F_μ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F"_\mu(x) + F_\mu(x)$ en fonction de $\mu(x)$.
   (c) Montrer que $F_\mu = \varphi_\mu$.
2. **Caractère 2π-périodique de φ_μ.**
   (a) Calculer les dérivées respectives des deux fonctions $x \mapsto G_\mu(x + 2\pi) - G_\mu(x)$ et $x \mapsto H_\mu(x + 2\pi) - H_\mu(x)$.
   (b) Exprimer $G_\mu(x + 2\pi) - G_\mu(x)$ en fonction de $G_\mu(2\pi)$ et $H_\mu(x + 2\pi) - H_\mu(x)$ en fonction de $H_\mu(2\pi)$.
   (c) Exprimer $\varphi_\mu(x+2\pi) - \varphi_\mu(x)$ en fonction de $\sin(x), \cos(x), G_\mu(2\pi)$, puis $H_\mu(2\pi)$.
   (d) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $G_\mu(2\pi)$ et $H_\mu(2\pi)$ la fonction φ_μ est-elle 2π-périodique ?
   (e) La fonction φ_μ est-elle 2π-périodique :
      (e-1) lorsque $\mu(t) = \sin(t)$?
      (e-2) lorsque $\mu(t) = \cos(t)$?
   (f) La fonction φ_μ est-elle bornée :
      (f-1) lorsque $\mu(t) = \sin(t)$?
      (f-2) lorsque $\mu(t) = \cos(t)$?
   (g) lorsque $\mu(t) = |\sin(t)|$.
      (g-1) Montrer que la fonction φ_μ est 2π-périodique.
      (g-2) Les fonctions $\varphi_\mu, \varphi'_\mu$ et $\varphi"_\mu$ sont-elles bornées ?

3. **Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(t)|dt$.**
Jusqu'a la fin de cette partie, on suppose que $\mu : t \mapsto |\sin(t)|$, et on pose pour tout entier naturel n :
$$v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}|\sin(t)|dt \quad et \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$
   (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(t)|dt$ converge.
   (b) **Étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
      (b-1) Calculer v_0.
      (b-2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_{n+1} = e^{-\pi}v_n$.
      Indication : utiliser un changement de variable adéquat.
      (b-3) En déduire, en utilisant la récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_{n+1} = e^{-n\pi}v_0$.
   (c) Calculer et simplifier la valeur de S_n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
   (d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(t)|dt$.
   Indication : vérifier d'abord que $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(t)|dt = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
4. **Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi_\mu(t)dt$.**
   (a) Montrer que les trois intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi_\mu(t)dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi'_\mu(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi"_\mu(t)dt$ convergent.
   (b) Établir une relation entre $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mu(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi_\mu(t)dt$.
   (c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi_\mu(t)dt$.
5. **Une équation fonctionnelle.**
Comme deuxième application, on va étudier une équation fonctionnelle extraite du **Concours X-2006-MP-1ère composition**.
Soient α, γ deux réels fixés, avec γ non nul et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout réel x :
$$f'(x) = f(\gamma x), \quad f(0) = \alpha \quad (C_{\gamma,\alpha})$$
   (a) **Cas particuliers.**
      (a-1) Résoudre $(C_{\gamma,\alpha})$ dans le cas où $\gamma = 1$.
      (a-2) Résoudre $(C_{\gamma,\alpha})$ dans le cas où $\gamma = -1$.
   (b) Montrer que si f est une solution de $(C_{\gamma,\alpha})$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Pour toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$, on définit une fonction notée $T(g)$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad T(g)(x) = \alpha + \int_0^x g(\gamma t)dt.$$
   Et par récurrence, on définit $T^n(g)$, en posant pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$T^1(g) = T(g) \quad et \quad T^{n+1}(g) = T[T^n(g)].$$
      (c-1) Montrer que si g_1, g_2 sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et λ un réel, alors :
$$T(\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2) = \lambda T(g_1) + (1-\lambda)T(g_2).$$
      (c-2) Montrer que f est une solution de $(C_{\gamma,\alpha})$ si, et seulement si $T(f) = f$.
      C'est-à- dire que $\forall x \in \mathbb{R}; \quad T(f)(x) = f(x)$.
      (c-3) Supposons ici que $|\gamma| < 1$, montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x :
$$|T^n(g)(x) - T^n(h)(x)| \leq |\gamma|^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{|x|^n}{n!} ||g-h||_\infty.$$
      Où g et h sont des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$
      et $||g-h||_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - h(t)|$.

FIN