LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°2$-T- $n°2$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

28/02/2009

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties dépendantes.
Il est extrait du **Concours Commun Polytechnique-2006-MP-maths 2**.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire et de la norme euclidiens canoniques, avec $n \geq 2$.
Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on appelle matrice de GRAM de $x_1, x_2, \dots, x_p$, notée $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} < x_1/x_1 > & < x_1/x_2 > & \dots & < x_1/x_p > \\ < x_2/x_1 > & < x_2/x_2 > & \dots & < x_2/x_p > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < x_p/x_1 > & < x_p/x_2 > & \dots & < x_p/x_p > \end{pmatrix}$$

On notera $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p)$ son déterminant : $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p) = \det\left(G(x_1, x_2, \dots, x_p)\right)$.

Partie I :Résultats préliminaires.

On commence par généraliser la notion de déterminant d'une matrice carrée, et on rappelle les résultats (admis) suivants :

(i) Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $A' \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ et $\alpha, b_1, b_2, \dots, b_{p-1}$ des réels, avec $p \geq 2$, tels que $A = \begin{pmatrix} \alpha & b_1 \dots b_{p-1} \\ 0_{p-1,1} & A' \end{pmatrix}$ est définie par blocs, alors : $\det(A) = \alpha \det(A')$.

(ii) Deux matrices semblables ont le même déterminant.

(iii) Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

(iv) Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.

(v) Si $(A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$, on a : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

1. **Déterminants d'ordre quelconque.**

   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x \\ x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & x & 1 \end{pmatrix}$, montrer, en utilisant la méthode de Gauss, que :

   $$\det(A) = (1-x)^{n-1}(1+(n-1)x).$$

   A quelle condition sur le réel x la matrice A est-elle inversible ?

   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont des nombres réels. Calculer $\det(A)$. A quelle condition sur les réels a, b, c et d la matrice A est-elle inversible ?

   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} y & x & \dots & x \\ x & y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & x & y \end{pmatrix}$.

   (c-1) En utilisant la méthode de Gauss, calculer $\det(A)$.

   (c-2) A quelle condition sur les réels x et y, la matrice A est-elle inversible ?

   (d) Soient x_1, x_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

   (d-1) Rappeler la formule de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   (d-2) Calculer $\Gamma(x_1, x_2)$, et vérifier que $\Gamma(x_1, x_2) \geq 0$.

   (d-3) A quelle condition sur les vecteurs x_1, x_2 ce déterminant de GRAM est-il nul ?

2. **Noyau d'une matrice.**

   Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, le noyau de A est, par définition :

   $$Ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}.$$

   On admet que le rang d'une telle matrice A vérifie : $rg(A) = q - dim(Ker(A))$.

   (a) Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (a-1) Calculer ${}^tYY$.

   (a-2) Montrer que ${}^tYY = 0 \Leftrightarrow Y = 0_{n,1}$.

   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, montrer que $Ker({}^tAA) = Ker(A)$.

   (c) En déduire que $rg({}^tAA) = rg(A)$.

   (d) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ dans la base $\mathcal{B}$.

   C'est-à- dire que $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, pour tout (i,j) tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

   (d-1) Rappeler la définition du produit de deux matrices.

   (d-2) Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_p) =^t AA$.

   (d-3) En déduire que $rg(G(x_1, x_2, \dots, x_p)) = rg(A)$ et que le déterminant de GRAM vérifie $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p) = (\det(A))^2$.

(e) Supposons ici que $n = p$.

(e-1) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit liée.

(e-2) Montrer que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$.

3. **Une première application.**
Ici $n = 3$. L'angle géométrique d'un couple de vecteurs non nuls (u, v) de $\mathbb{R}^3$ est le réel $\alpha \in [0, \pi]$ vérifiant : $\cos\alpha = \frac{<u/v>}{||u||||v||}$.

(a) **Dans la sphère unité.**
On note $S(O, 1)$ la sphère unité de centre O et de rayon 1.

(a-1) Donner l'équation cartésienne(normale) et une parametrisation de la sphère $S(O, 1)$.

(a-2) Préciser l'intersection de $S(O, 1)$ avec le plan d'équation $z = 2$.

(a-3) Préciser l'intersection de $S(O, 1)$ avec le plan d'équation $z = 1$.

(a-4) Préciser l'intersection de $S(O, 1)$ avec le plan d'équation $z = \frac{1}{2}$.

Soient A, B et C sont trois points de $\mathbb{R}^3$ situés sur la sphère $S(O, 1)$ de centre O et de rayon 1, et α, β et γ désignent les angles géométriques des couples respectifs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}), (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.

(b) Calculer $\Gamma(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ en fonction de $\cos\alpha, \cos\beta$ et $\cos\gamma$.

(c) Montrer que $1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \geq \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

(d) Montrer qu'on a l'égalité si, les points A, B et C sont situés sur un même cercle.

(e) Que peut-on dire de la réciproque de cette dernière question (d) ?

4. **Deux autres applications.**

(a) Soient a, b et y trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que a soit orthogonal à la fois au vecteur b et au vecteur y.

(a-1) Rappeler les trois identités de polarisation.

(a-2) Rappeler le théorème de Pythagore.

(a-3) Montrer que $\Gamma(a + b, y) = \Gamma(a, y) + \Gamma(b, y)$.

(b) On suppose ici que $n = 2$.

(b-1) Si (x, y) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ et z le projeté orthogonal du vecteur x sur $F = Vect\{y\}$, montrer que $\Gamma(x, y) = \Gamma(x - z, y)$.

(b-2) Si A, B et C sont trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$, montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$.
En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.

(b-3) Calculer alors l'aire du parallélogramme $ABCD$, où $A = (2, 0); B = (-1, 3); C = (1, 5); D = (4, 2)$.

(c) On suppose ici que $n = 3$, et soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace $\mathbb{R}^3$.

(c-1) Montrer que le volume du parallélépipède formé par A, B, C et D est égal à : $\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}$.

(c-2) Calculer ce volume dans le cas où $A = (1, 2, 0); B = (1, -1, 3); C = (-1, -2, 0)$ et $D = (3, -1, 0)$.

Partie II : Points équidistants sur une sphère.

1. **Famille obtus-angle.**
Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dite obtus-angle c'est-à-dire telle que :
$$\forall (i, j) \in [|1, p|]^2; \quad i \neq j \Rightarrow < v_i/v_j >< 0.$$
On veut montrer que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_{p-1})$ est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_i v_i = 0$.

(a) Montrer par récurrence que si $p \geq 2$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} ||x_i||^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} < x_i/x_j > .$$

(b) Montrer que $\left\|\sum\limits_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| v_i\right\|^2 \leq \left\|\sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_i v_i\right\|^2$.

(c) En déduire que $\sum\limits_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| v_i = 0$.

(d) Montrer alors que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$, puis que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_{p-1})$ est libre.

(e) Comparer p et $n+1$.

(f) Existe t-il une famille obtus-angle à $n+2$ éléments ? Que peut-on dire d'une famille obtus-angle à $n+1$ éléments ?

Dans toute la suite de cette partie, on considère un entier naturel $m \geq 2$, et une famille de m vecteurs distincts $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de l'espace $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$. On dit que la famille des m vecteurs distincts $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est solution du problème $P(m,t)$ si :

– tous les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont de norme 1.
– pour tout couple $(i,j) \in [|1, m|]^2$: $i \neq j \Rightarrow < x_i/x_j >= t$.

2. **Résultats préliminaires.**

(a) Montrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est solution du problème $P(m,t)$ alors, pour tout couple $(i,j) \in [|1, m|]^2$; $\quad i \neq j \Rightarrow ||x_i - x_j|| = \sqrt{2(1-t)}$.

(b) Montrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est solution du problème $P(m,t)$ alors :

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (1-t)^{m-1}(1 + (m-1)t)$$

Indication : utiliser la question $(I - 1 - a)$.

3. **Conditions nécessaires.**

(a) Montrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est une famille libre de vecteurs solution du problème $P(m,t)$ alors $t \in]\frac{-1}{m-1}, 1[$ et $m \leq n$.

(b) Montrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est une famille liée de vecteurs solution du problème $P(m,t)$ alors $t = \frac{-1}{m-1}$, puis que $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ est libre.
En déduire alors que $m \leq n+1$.

(c) **Application :**
Existe-t-il dans $\mathbb{R}^3$ cinq vecteurs distincts qui deux à deux forment un même angle obtus θ, c'est-à-dire $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$?

4. **Dans le plan $\mathbb{R}^2$.**

Supposons que $n = 2$ et que $m \geq 3$. Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ une famille de points de $\mathbb{R}^2$ telle que la famille $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_m})$ soit solution du problème $P(m,t)$.

(a) La famille $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_m})$ est-elle libre ou liée dans $\mathbb{R}^2$?

(b) Montrer que $m = 3$ et que $t = \frac{-1}{2}$.

(c) Placer ces points sur une figure.

5. **Dans l'espace $\mathbb{R}^3$.**

Supposons que $n = 3$ et que $t \in]\frac{-1}{2}, 1[$, on pose $a = \sqrt{\frac{2-2t}{3}}$ et $b = \sqrt{\frac{2t+1}{3}}$.

(a) Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et $H = (Vect\{u\})^{\perp}$, justifier l'existence d'une famille (y_1, y_2, y_3) de vecteurs de H solution du problème $P(3, \frac{-1}{2})$.

(b) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, posons $x_i = ay_i + bu$, montrer que (x_1, x_2, x_3) est une famille libre solution du problème $P(3, t)$.

(c) Soient $\alpha \in]0, \pi[$, A, B, C trois points de la sphère de centre O et de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$ tels que les trois angles géométriques des couples $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}), (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ soient égaux à α. Montrer que $\cos \alpha \geq \frac{-1}{2}$.

Partie III : Théorèmes d'Apollonius.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé canonique (O, e_1, e_2) , on considère l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont deux réels strictement positifs.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ en posant pour tous $U = (u, u')$ et $V = (v, v')$:

$$\varphi(U, V) = \frac{uv}{a^2} + \frac{u'v'}{b^2}.$$

1. **Propriétés de φ.**

(a) Montrer que φ est bilinéaire c'est-à-dire linéaire par rapport à ces deux variables.

(b) Vérifier que pour tout vecteur U de $\mathbb{R}^2$: $\varphi(U, U) \geq 0$ et que :

$$\varphi(U, U) = 0 \Leftrightarrow U = (0, 0).$$

(c) Vérifier que $\varphi(U, V) = \varphi(V, U)$, pour tous vecteurs U et V dans $\mathbb{R}^2$.

(d) Montrer que l'application $||.||_\varphi : U \mapsto ||U||_\varphi = \sqrt{\varphi(U, U)}$ définit une norme sur l'espace $\mathbb{R}^2$.

(e) Montrer que pour tous vecteurs U et V dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$|\varphi(U, V)| \leq ||U||_\varphi ||V||_\varphi.$$

2. **Diamètres conjugués dans $\mathcal{C}$.**
On dit que les vecteurs U et V sont des diamètres conjugués de $\mathcal{C}$ si
$\varphi(U, U) = \varphi(V, V) = 1$ et $\varphi(U, V) = 0$.

(a) Vérifier que $U_0 = (a, 0)$ et $V_0 = (0, b)$ sont des diamètres conjugués dans $\mathcal{C}$.

(b) Donner un autre exemple de deux diamètres conjugués.

(c) Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$, montrer que l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en M_0 est $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

(d) En déduire que l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par O et parallèle à T est donnée par $\varphi(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}) = 0$.

(e) Soit M_0' un point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_0'}$ sont des diamètres conjugués de $\mathcal{C}$.
Placer les points M_0 et M_0' sur une figure.

3. **Deux théorèmes d'Apollonius.**
Soient $M = (x, y)$ et $M' = (x', y')$ deux points de $\mathcal{C}$ tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient des diamètres conjugués de $\mathcal{C}$.

(a) Montrer que $\Gamma(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \Gamma(U_0, V_0)$; où $U_0 = (a, 0)$ et $V_0 = (0, b)$.

(b) En déduire que :

(b-1) $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$.

(b-2) L'aire du parallélogramme construit sur O, M et M' est égale au réel ab.

FIN