LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°1$-T- $n°3$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

18/04/2009

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de deux parties dépendantes.
Sa première partie est extraite du **Concours Commun e3a-2007-MP-maths A**.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

Partie I : Équivalents et séries.

1. **Quelques exemples.**

   (a) Donner un équivalent simple de u_n, puis en déduire la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :
   (a-1) $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^3+n+(-1)^{n+1}}$.
   (a-2) $u_n = \frac{e^n}{e^n+1}$.
   (a-3) $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2}\right)$.
   (a-4) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n+(-1)^n}$.
   (b) Donner un développement asymptotique de u_n, puis en déduire la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :
   (b-1) $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.
   (b-2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$, avec $a > 0$.
   (b-3) $u_n = \left(1+\frac{n}{\ln n}\right)^n$.
   (b-4) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2. **Cas d'une série alternée.**
   On considère la série alternée $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ telle que :
   (i) $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n > 0$,
   (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$,
   (iii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0 ,
   (iv) $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$.

On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$, pour tout entier naturel n.

(a) **Signe de R_n :**

(a-1) Énoncer avec précision le critère spécial des séries alternées.

(a-2) Vérifier que R_n existe dans $\mathbb{R}$.

(a-3) Comparer les signes de R_n et $(-1)^n u_n$.

(b) **Monotonie de $(|R_n|)$:**

(b-1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; \quad |R_n| + |R_{n+1}| = u_n$.

Indication : distinguer les cas suivant la parité de n.

(b-2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; \quad |R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p [u_{n+p} - u_{n+1+p}]$.

(b-3) En déduire que la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) **Un équivalent de R_n :**

(c-1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; \quad \frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}$.

(c-2) En déduire qu'au voisinage de l'infini : $|R_n| \sim \frac{u_n}{2}$.

(c-3) Conclure qu'au voisinage de l'infini : $R_n \sim (-1)^n \frac{u_n}{2}$.

(c-4) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} R_n$:

- Si $u_n = \frac{1}{n+1}$?
- Et si $u_n = \frac{1}{n^2+1}$?

(d) **Application :**

On pose $u_n = \frac{\ln n}{n}$, pour tout $n \geq 2$.

(d-1) Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$.

(d-2) Montrer que (u_n) vérifie les conditions de (i) à (iv).

(d-3) Déterminer un équivalent simple de R_n au voisinage de l'infini.

(d-4) La série $\sum_{n\geq 2} R_n$ converge-t-elle absolument ?

3. **Cas des séries entières**

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes strictement positifs telles que : $a_n \sim b_n$ au voisinage de l'infini.

On suppose de plus que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ est égal à $+\infty$ c'est-à-dire que la fonction $f : t \mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$?

En déduire que la fonction $g : t \mapsto g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) **Équivalence de $f(t)$ et $g(t)$ en $+\infty$** :

(b-1) Justifier l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad a_n = b_n(1 + \gamma_n).$$

Soit $m \in \mathbb{N}$.

(b-2) Prouver l'existence de $\delta_m = \sup_{n\geq m} |\gamma_n|$.

(b-3) Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leq \delta_m + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\delta_n| b_n t^n.$$

(b-4) En déduire que $f(t) \sim g(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

(c) **Application**

On admet que pour tout réel t, on a : $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

On considère la fonction définie par : $f : t \mapsto f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!} t^n$ et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!}$$

(c-1) Donner un équivalent simple de a_n, lorsque $n \to +\infty$.

(c-2) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!} t^n$.

(c-3) Montrer soigneusement que $f(t) \sim \exp(t+1)$ lorsque $t \to +\infty$.

(c-4) En déduire la limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

4. **Fonction Zéta de Riemann.**
Pour tout réel x, on pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$. On définit ainsi la fonction ζ de Riemann.

(a) **Étude de la fonction Zéta .**

(a-1) Vérifier que le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty[$.

(a-2) Montrer que ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.
Indication : Considérer x et y dans $]1, +\infty[$ tels que $x < y$ et montrer que $\zeta(x) > \zeta(y)$.

(a-3) En déduire que $\lim\limits_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

(a-4) Montrer que pour tout $x \geq 2$ et tout entier $N \geq 1$, on a :

$$1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(a-5) En déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty} \zeta(x) = 1$.

(a-6) Tracer sommairement la courbe représentative de la fonction ζ.

(b) **La fonction Zéta est convexe.**
Posons pour tous $n \geq 1$ et $x > 1$: $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

(b-1) Calculer la dérivée seconde de la fonction f_n, pour tout $n \geq 1$.

(b-2) En déduire que la fonction f_n est convexe,pour tout $n \geq 1$.

(b-3) Montrer que pour tous $N \geq 1$, $x > 1$, $y > 1$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\lambda x + (1-\lambda) y}} \leq \lambda \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + (1-\lambda) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^y}.$$

(b-4) En déduire que la fonction ζ est convexe.

(c) **Équivalent à l'infini.**

(c-1) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3^{1-x}}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2^{1-x}}{x-1}$.

(c-2) Vérifier que $\zeta(x) - 1 - 2^{-x} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, pour tout $x > 1$.

(c-3) Montrer que pour tous $n \geq 2$ et $x > 1$:

$$\int_{n}^{n+1} t^{-x} dt \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} t^{-x} dt \quad (*)$$

(c-4) En déduire que pour tous $n \geq 3$ et $x > 1$:

$$\frac{(N+1)^{1-x} - 3^{1-x}}{1-x} \leq \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \frac{(N)^{1-x} - 2^{1-x}}{1-x}.$$

(c-5) Montrer alors que pour tout $x > 1$:

$$\frac{3^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{2^{1-x}}{x-1}.$$

(c-6) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$.

(c-7) Prouver donc que $\zeta(x) - 1 \sim \frac{1}{2^x}$ lorsque $x \to +\infty$.

(d) **Équivalent en 1.**

(d-1) En utilisant la relation $(*)$, montrer que pour tous $N \geq 2$ et $x > 1$:

$$\frac{(N)^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}.$$

(d-2) En déduire que que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ lorsque $x \to 1^+$.

(d-3) Retrouver la limite de $\zeta(x)$ lorsque $x \to 1^+$.

Partie II : Séries de Dirichlet.

1. **Transformation d'Abel.**

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes vérifiant les conditions suivantes :

– La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad |A_n| \leq M.$$

– La série $\sum |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$ converge.

– La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(a) Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, avec $q \geq p \geq 1$, on a :

$$\left|\sum_{n=p}^{q} v_n \alpha_n\right| \leq M \left(|\alpha_{p-1}| + |\alpha_q| + \sum_{n=p}^{q-1} |\alpha_{n+1} - \alpha_n|\right).$$

Indication : remarquer que $v_n = A_n - A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

(b) En déduire que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k \alpha_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(c) Montrer que la série $\sum v_n \alpha_n$ converge.

(d) Y-a-il en général convergence absolue de $\sum v_n \alpha_n$? Justifier votre réponse.

(e) Énoncer le résultat ainsi démontré.

(f) **Applications.**

Dans les trois questions suivantes, on doit utiliser les résultats de la question $(II-1)$ précédente.

(f-1) Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante en tendant vers 0, montrer que la série $\sum v_n \alpha_n$ converge.

(f-2) Si $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = (-1)^n$ et si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante en tendant vers 0, montrer que la série $\sum v_n \alpha_n$ converge.

(f-3) Si $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = (-1)^{n+1}$ et si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante en tendant vers 0, montrer que la série $\sum v_n \alpha_n$ converge. [1]

[1] Dans $(II-1-f-1)$ et $(II-f-2)$, on démontre une partie du critère spécial des séries alternées.

Dans la suite de cette partie, on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.

On pose, pour tous entier n et tout complexe z : $u_n(z) = a_n e^{-\lambda_n z}$ et on note :

$$I_C = \left\{x \in \mathbb{R} / \sum u_n(x) \quad converge\right\}$$

$$I_A = \left\{x \in \mathbb{R} / \sum u_n(x) \quad converge \quad absolument\right\}$$

Si ces deux ensembles sont non vides, on note :

$$\sigma_C = Inf(I_C); \quad \sigma_A = Inf(I_A).$$

Les quantités σ_C et σ_A peuvent être infinies.

2. **Cas particulier.**
   On suppose que $\lambda_n = \ln n$, c'est-à-dire que $u_n(z) = \frac{a_n}{n^z}$, pour tout entier $n \geq 1$ et tout complexe z.
   (a) Déterminer I_A, σ_A, I_C, et σ_C dans chacun des cas suivants :
      (a-1) $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
      (a-2) $a_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^{z_0}}$ converge absolument. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > Re(z_0)$, alors la série $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge absolument.
      Indication : remarquer que $\frac{a_n}{n^z} = \frac{a_n}{n^{z_0}}\beta_n$, où β_n est à déterminer.
   (c) Déduire de la question précédente que :
      (c-1) Si $\sigma_A = -\infty$, alors $\sum u_n(z)$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.
      (c-2) Si $\sigma_A = +\infty$, alors $\sum u_n(z)$ ne converge absolument pour aucun $z \in \mathbb{C}$.
      (c-3) Si $\sigma_A \in \mathbb{R}$, alors $\sum u_n(z)$ converge absolument pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ tel $Re(z) > \sigma_A$.
   (d) **Quelques propriétés.**

      (d-1) Montrer que $\sigma_C \leq \sigma_A \leq \sigma_C + 1$.
      (d-2) Donner un exemple tel que $\sigma_C = \sigma_A$.
      (d-3) Donner un exemple tel que $\sigma_C + 1 = \sigma_A$.
      (d-4) En prenant $a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right), \forall n \geq 2$, montrer qu'il est possible d'avoir $\sigma_C < \sigma_A < \sigma_C + 1$.
   (e) **Convergence de la série.**
      Soit a un complexe tel que $Re(a) > 0$.
      (e-1) Montrer que $\frac{1}{(n+1)^a} - \frac{1}{n^a} = \frac{-a}{n^{a+1}} + \frac{a^2}{2n^{a+2}} + o\left(\frac{1}{2n^{a+2}}\right)$, pour $n \to +\infty$.
      (e-2) Prouver que $\left|\frac{1}{(n+1)^a} - \frac{1}{n^a}\right| \sim \frac{|a|}{n^{Re(a)+1}}$, pour $n \to +\infty$.
      (e-3) En déduire que $\sum \left(\frac{1}{(n+1)^a} - \frac{1}{n^a}\right)$ converge absolument.
      (e-4) Montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^{z_0}}$ converge, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > Re(z_0)$ la série $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge.
         Indication : Utiliser la transformation d'Abel.

3. **Cas général.**
   On revient ici au cas général.
   (a) **Étude de I_A et I_C.**

      (a-1) Montrer que I_A est un intervalle.
      (a-2) Si $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\lambda_n = \ln(\ln(n+1)), \forall n \geq 1$.
         Établir que $I_A = \emptyset$ et $I_C = \mathbb{R}$.
      (a-3) Donner un exemple de couple (a_n, λ_n) tel que $I_A = I_C = \emptyset$.

(a-4) Donner un exemple de couple (a_n, λ_n) tel que $I_A = I_C = \mathbb{R}$.
On suppose désormais que I_C est non vide et minoré.

(b) Montrer que si (a_n) est une suite de réels positifs, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > \sigma_C$ la série $\sum u_n(z)$ converge.

(c) Si maintenant (a_n) est une suite complexe, soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > \sigma_C$.

(b-1) Justifier l'existence d'un élément $y \in I_C$ tel que $x > y > I_C$, puis en déduire que $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ converge.
Indication : remarquer la relation $a_n e^{-\lambda_n x} = a_n e^{-\lambda_n y} e^{-\lambda_n (x-y)}$, , puis utiliser la transformation d'Abel.

(b-2) Montrer que I_C est un intervalle.

FIN