LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Devoir surveillé $n°3$-T- $n°2$
Proposé par: EL JAOUI EL HASSAN

21/03/2009

Ce devoir surveillé est composé d'un problème formé de trois parties dépendantes.
Il est extrait du **Concours Commun Polytechnique-2002-MP-maths 2**.
Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation de la copie.
Tout essai de plagiat ou de fraude sera sévèrement puni.
Les résultats de calcul devront être centrés et encadrés.
Souligner pour séparer deux réponses consécutives, et surtout n'oublier pas de laisser une bonne marge pour la notation et les remarques du correcteur.

---

1 Problème.

Dans tout ce problème n désigne un entier naturel tel que $n \geq 2$ et tous les espaces considérés seront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
On dira que deux $\mathbb{R}$-algèbres sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbres entre les deux.
Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et $k \in \mathbb{N}$, on définit l'endomorphisme f^k de E par récurrence, en posant :

$$f^0 = Id_E \quad et \quad f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f.$$

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels, est une $\mathbb{R}$-algèbre pour les lois usuelles.
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera dite scalaire s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I_n$, et dans le cas contraire on dira que A est non scalaire.
La matrice A sera dite nilpotente d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ lorsque $A^k = 0_n$ et $A^{k-1} \neq 0$.

Partie I :Étude d'un exemple.

1. **Dimension d'une algèbre.**
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrer que $A^2 - tr(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
   On considère une matrice A non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}$ l'ensemble :
   $$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : M = aI_2 + bA\}.$$
   (b) Vérifier que $\mathbb{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que la famille (I_2, A) est une base de $\mathbb{A}$, puis préciser $dim(\mathbb{A})$.
   (d) Vérifier que $\mathbb{A}$ est une algèbre commutative.

2. **L'algèbre $\mathbb{A}$ est-elle un corps ?**
   (a) Montrer que l'application f : $\begin{array}{c} \mathbb{A} \to \mathbb{C} \\ M = aI_2 + bA \mapsto a + ib \end{array}$ est linéaire. S'agit-il d'un morphisme d'algèbres ?
   (b) Montrer que $\mathbb{A}$ contient une matrice B telle que $B^2 = -I_2$ si, et seulement si $(tr(A))^2 < 4\det(A)$.
   (c) Supposons qu'une telle matrice B existe dans $\mathbb{A}$.
      (c-1) Montrer que la famille (I_2, B) est une base de $\mathbb{A}$. Que peut-on alors déduire ?
      (c-2) Montrer que l'application f précédente est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
      (c-3) l'algèbre $\mathbb{A}$ est-elle un corps ?
   (d) Supposons que A est non scalaire et vérifie $(tr(A))^2 = 4\det(A)$.
      (d-1) Déterminer toutes les matrices M de $\mathbb{A}$ telle que $M^2 = 0$.
      (d-2) En déduire que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.
3. **Algèbres isomorphes.**
   Soit B une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on lui associe l'algèbre commutative $\mathbb{B}$ définie par :
   $$\mathbb{B} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : M = aI_2 + bB\}.$$
   Supposons que A et B sont semblables, et soit $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^{-1}$. on définit l'application :
   $$\varphi : \begin{array}{c} \mathbb{A} \to \mathbb{B} \\ M \mapsto PMP^{-1} \end{array}.$$
   (a) Vérifier que φ est bien définie.
   (b) Montrer que φ est un morphisme d'algèbres.
   (c) Montrer que φ est bijective.
   (d) Comparer les dimensions de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.
   (e) Peut-on avoir un isomorphisme entre deux algèbres de dimensions différentes ?
4. **Cas où A est diagonalisable.**
   On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On suppose que A vérifie $(tr(A))^2 > 4\det(A)$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que A possède deux valeurs propres distinctes qu'on note λ_1 et λ_2.
   (c) En déduire que :
      (c-1) A est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
      (c-2) Les deux algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes.
      (c-2) $\dim(\mathcal{D}_2(\mathbb{R})) = 2$.
   (d) Est ce que $\mathbb{A}$ est un corps ?
5. **Cas où A est nilpotente.**
   On suppose ici que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et on considère un élément $M = aI_2 + bA$ de l'algèbre $\mathbb{A}$.
   (a) Vérifier que A est nilpotente d'indice 2.
   (b) Écrire la matrice $M = aI_2 + bA$ sous forme de tableau matriciel, puis calculer son déterminant.
   (c) Énoncer la formule du binôme de Newton dans un anneau.
   (d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k en fonction de a, b, I_2, A et k.
   (e) Déterminer l'ensemble $\mathbb{A}^*$ des éléments inversibles de $\mathbb{A}$, puis justifier que c'est un groupe pour la multiplication, et dire s'il est abélien ou non.
   (f) Pour $M = aI_2 + bA$ dans $\mathbb{A}^*$, calculer M^{-1} en fonction de I_2 et A.
   (g) Pour $M = aI_2 + bA$ dans $\mathbb{A}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, calculer M^k en fonction de a, b, I_2, A et k.

Partie II : Quelques résultats généraux.

Soient $\mathbb{E}$ une $\mathbb{R}$- algèbre de dimension n, $a \in \mathbb{E}$ et ϕ_a l'application définie par :

$$\phi_a : \begin{array}{l} \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ x \mapsto ax \end{array}$$

1. **Étude de ϕ_a.**

   (a) Montrer que ϕ_a est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.
   (b) A quelle condition sur a, l'application ϕ_a est un endomorphisme d'algèbres ?
   (c) Montrer que ϕ_a est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ si, et seulement si a est inversible dans $\mathbb{E}$.
   (d) Préciser la réciproque $(\phi_a)^{-1}$ de ϕ_a dans ce dernier cas.
   (e) Si $b \in \mathbb{E}$, déterminer $\phi_a \circ \phi_b$, puis retrouver le résultat de la question précédente.
   (f) Si a et inversible, montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{Z}; \quad (\phi_a)^n = \phi_{a^n}.$$

2. **Matrice d'un endomorphisme dans une base.**
   Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$ et h un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ tel que :

   $$\forall j \in [|1, n|]; \quad h(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i.$$

   On appelle matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, et on note $M = \mathcal{M}_B(h)$.
   (a) Montrer que l'application $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{E} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a \mapsto \mathcal{M}_B(\phi_a) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.
   (b) Montrer que le morphisme ψ est injectif.
   (c) Vérifier que $\psi(\mathbb{E})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que $\mathbb{E}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. **Un cas particulier.**
   On suppose ici que $\mathbb{E} = \mathbb{C}$, on considère $\mathcal{B} = (1, i)$ la base (dite canonique) de $\mathbb{C}$ et soit $z = a + ib$ un nombre complexe fixé, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Déterminer la matrice $M = \mathcal{M}_B(\phi_z)$.
   Indication : Calculer d'abord $\phi_z(1)$ et $\phi_z(i)$.
   (b) Montrer que ϕ_z est bijectif si, et seulement $z \neq 0$.
   (c) Donner $(\phi_z)^{-1}$, si $z \neq 0$.
   (d) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **Sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
   Soit $\mathbb{E}$ une sous-algèbres $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Rappeler la définition d'un anneau intègre.
   Supposons que l'algèbre $\mathbb{E}$ est intègre et soit $A \in \mathbb{E}$, avec A non nulle.
   (b) Justifier que l'application $\phi_A : \begin{array}{l} \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ X \mapsto AX \end{array}$ est un un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.
   (c) Montrer que ϕ_A est bijectif.
   (d) En déduire que $\mathbb{E}$ est un corps.
   (e) Énoncer le résultat ainsi démontré.

Partie III : L'algèbre des quaternions.

On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^2 = -I_n; \quad B^2 = -I_n; \quad AB + BA = 0 \quad (*).$$

On considère $\mathbb{H} = \{M = aI_n + bA + cB + dAB/(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$.

1. **Cas général.**
   (a) Montrer que n est nécessairement un entier pair.
   (b) Montrer que $\mathbb{H}$ est une une sous-algèbres $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Soient t, x, y et z des réels, calculer : $(tI_n+xA+yB+zAB)(tI_n-xA-yB-zAB)$.
   (d) En déduire que (I_n, A, B, AB) est une base de $\mathbb{H}$, puis donner la valeur de $\dim(\mathbb{H})$.
   (e) Montrer, en utilisant la question $(III-1-c)$, que $\mathbb{H}$ est un corps.
2. **Cas où $n = 4$.**
   On suppose dans toute la suite du problème que **n=4**.
   Notons $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et 0_2 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On considère les deux matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par blocs comme suit :

   $$A = \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & -J \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

   On pose aussi $C = AB$
   (a) Vérifier que les matrices A et B satisfont la condition $(*)$.
   (b) Quelle est la structure algébrique de $\mathbb{H} = Vect\{I_4, A, B, C\}$? Quelle est sa dimension ?
   (c) Déterminer l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathbb{H}$ pour la multiplication.
   (d) Calculer A^{-1}, B^{-1} et D^{-1}, où $D = \begin{pmatrix} I_2 + 3J & -4I_2 \\ 4I_2 & I_2 - 3J \end{pmatrix}$.
   Les éléments de $\mathbb{H}$ sont appelés quaternions.
   On note $\mathcal{B} = (I_4, A, B, C)$ la base de $\mathbb{H}$.
   (e) Soit M une matrice non nulle de $\mathbb{H}$, vérifier que ${}^tM \in \mathbb{H}$, puis donner le lien entre M^{-1} et ${}^tM$.
3. **Quaternions purs.**
   On appelle quaternion pur tout élément M de $\mathbb{H}$ tel que ${}^tM = -M$.
   On note $\mathbb{L}$ l'ensemble des quaternions purs.
   (a) Montrer que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Est ce que $\mathbb{L}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre ?
   (c) Montrer que $\mathcal{C} = (A, B, C)$ est une base de $\mathbb{L}$, puis donner $\dim(\mathbb{L})$.
   (d) Montrer qu'un quaternion M est pur si, et seulement si M^2 est une matrice scalaire de la forme λI_4 , où λ est un réel négatif.
   (e) Soient ϕ un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ et M un quaternion pur. Montrer que $\phi(M)$ est un quaternion pur.
   (f) A-t-on $\mathbb{L} = \mathbb{H}$? Si non, donner un exemple d'un quaternion non pur qui n'est pas une matrice scalaire.

FIN