LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°15$

Exercice 1.
Trouver le nombre d'entiers relatifs qui dans la division euclidienne par 23 *ont un quotient égal au reste.*

Exercice 2.
Trouver le le reste de la division euclidienne de 100^{1000} *par* 13.

Exercice 3.
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ *l'équation :* $11x + 17y = 5$.

Exercice 4.
Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ *n'a pas de racines dans* $\mathbb{Q}$.

Exercice 5.
Soit $n \in \mathbb{Z}$, *calculer* $n \vee (2n + 1)$.

Exercice 6.
Existe-t-il un système de numération dans lequel $\overline{34} + \overline{14} = \overline{103}$ *?*
Effectuer dans ce système de numération l'opération $\overline{34} \times \overline{14}$.

Exercice 7.
Existe-t-il un système de numération dans lequel $\overline{52} \times \overline{25} = \overline{1562}$ *?*
Effectuer dans ce système de numération l'opération $\overline{52} + \overline{25}$.

Exercice 8.
Un nombre s'écrit $\overline{10100011}$ *en base* 2, *quelle est son écriture en base* 8 *?*

Exercice 9.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. *Montrer que si* a *admet pour reste* r_1 *dans la division euclidienne de* a *par* n, *et* b *admet pour reste* r_2 *dans la division euclidienne de* b *par* n, *alors* $a + b$ *admet pour reste le reste de la division euclidienne de* $r_1 + r_2$ *par* n, *et* ab *admet pour reste le reste de la division euclidienne de* $r_1 r_2$ *par* n.
2. *Quels sont les restes de la division euclidienne de* 10^k *par* 9 *?*
   Expliquer le principe de la preuve pour 9.
3. *Expliquer le principe de la preuve pour* 11.

Exercice 10.
Montrer qu'il existe des intervalles de $\mathbb{N}$ *de longueur aussi grande que l'on veut qui ne contiennent aucun nombre premier.*

Exercice 11.
Soit p *un nombre premier.*

1. *Montrer que pour tout entier* $k \in [|1, p - 1|]$ *:* p *divise* C_p^k.
2. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ *montrer que :*
$$p \mid (a + b)^p - a^p - b^p.$$
3. *En déduire que :*
$$\forall m \in \mathbb{N}^*; \quad p \mid m^p - m.$$
4. *Montrer que si* $m \wedge p = 1$, *alors :*
$$p \mid m^{p-1} - 1.$$

Exercice 12.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ *sa décomposition en produit de facteurs premiers.*

1. *Calculer le nombre* $\delta(n)$ *des diviseurs positifs de* n.
2. *Calculer la somme* $\sigma(n)$ *des diviseurs positifs de* n.
3. *Calculer le produit* $\pi(n)$ *des diviseurs positifs de* n.
4. *Calculer* $\delta(3600)$, $\sigma(3600)$ *et* $\pi(3600)$.
5. *Calculer* $\delta(p^\alpha)$, $\sigma(p^\alpha)$ *et* $\pi(p^\alpha)$, *où* p *est un nombre premier et* α *est un entier naturel.*
   On dit qu'une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est multiplicative si elle vérifie pour :*
   $$\forall (m, n) \in \mathbb{N}; \quad m \wedge n = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n).$$
6. *Montrer que les applications* δ, σ *et* π *sont multiplicatives.*

Exercice 13.
Soit n *un entier avec* $n \geq 2$.
Montrer que si $2^n - 1$ *est premier alors* n *est premier.*

Exercice 14.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $2^m + 1$ *soit premier.*
Montrer que m *est de la forme* $m = 2^n$, *où* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $F_n = 2^{2^n} + 1$.
Montrer que si $m \neq n$, *alors* $F_m \wedge F_n = 1$.

Exercice 16.
Soit p *un nombre entier tel que* $2^p - 1$ *soit premier.*

1. *Montrer que le nombre* $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ *est parfait.*
2. *Montrer que tout nombre parfait est de la forme* $2^{p-1}(2^p - 1)$, *où* p *est premier.*

Exercice 17.

1. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme* $4k + 3$.
2. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme* $6k + 5$.

Exercice 18.
Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *l'équation :*
$$x^y = y^x.$$

Exercice 19.
Soient a *et* b *deux entiers naturels donnés.*

1. *Si* $0 < a < b$, *montrer que :*
   $$(a + b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b.$$
2. *Trouver* a *et* b *tels que :*
   $$\begin{cases} a + b = 144 \\ a \vee b = 420 \end{cases}$$