

LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices n°3

Exercice 1.

Montrer que $|z - i| = |z + i| \iff z \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soient z, z' deux nombres complexes, montrer que :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Exercice 3.

Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe :

$$Z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Calculer Z^3 .

Exercice 4.

Linéariser $\cos^7 x$.

Exercice 5.

Calculer $\frac{\sin 6x}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$.

Exercice 6.

Démontrer que si a, b et c sont trois réels tels que $a + b + c = \pi$, alors :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1$$

Exercice 7.

Résoudre les équations suivantes :

1. $z^2 = -7 + 24i$.
2. $z^2 = -3 - 4i$.
3. $z^2 - 2(2 + i)z + 6 + 8i = 0$.
4. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.
5. $16(z - 1)^4 + (z + 1)^4 = 0$.
6. $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$.

Exercice 8.

Déterminer :

1. les racines cinquièmes de $-i$.
2. les racines sixièmes de $\frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$.

Exercice 9.

Soient n et p deux entiers tels que $n \geq 2$ et $p \geq 1$.

Calculer la somme des puissances pèmes des racines d'ordre n de l'unité.

Exercice 10.

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} - nz^n = 0 \Rightarrow |z| \leq 1.$$

Exercice 11.

Soient a_0, a_1, \dots, a_n des nombres réels et p l'application définie sur \mathbb{C} par :

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

Montrer que si $p(z) = 0$ alors $p(\bar{z}) = 0$.

Exercice 12.

Décomposer $z^6 - 2z^3 \cos \theta + 1$ en produit de trois trinômes du second degré à coefficients réels.

Exercice 13.

Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer :

$$A = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) \text{ et } B = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx).$$

Exercice 14.

Quel est l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z + \bar{z} = |z|$?

Exercice 15.

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les n complexes z_1, z_2, \dots, z_n , tous non nuls pour que $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.