LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°5$

Exercice 1.
Soit f une fonction dérivable en un point x_0, calculer :

1. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.
3. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f^2(x_0+3h)-f^2(x_0-h)}{h}$.

Exercice 2.

1. *La dérivée d'une fonction dérivable T-périodique est-elle périodique ?*
2. *La dérivée d'une fonction dérivable paire est-elle paire ?*
3. *La dérivée d'une fonction dérivable impaire est-elle impaire ?*

Exercice 3.
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k\cos(kx)$.

Exercice 4.
Soit f une fonction polynômiale de degré n à coefficients réels, qui possède n racines réelles distinctes. Montrer que f' possède $n-1$ racines réelles distinctes.
Ce résultat reste-t-il vrai si f est à coefficients complexes ?

Exercice 5.

1. *Montrer que les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont* 1*-lipschitziennes sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que la fonction $t \mapsto e^{it}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 6.

1. *Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $f : x \mapsto x^3e^{itx}$, avec $t \in \mathbb{R}$.*
2. *Montrer que la dérivée d'ordre $n+1$ de la fonction $x \mapsto x^ne^{\frac{1}{x}}$ est :*

$$x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 7.
Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$(fb)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

Exercice 8.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I vers $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que si a et b sont deux éléments de I vérifiant $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors il existe c entre a et b tel que $f'(c) = 0$.*
2. *Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.*
3. *Enoncer le théorème de Darboux ainsi démontré.*

Exercice 9.
Soit f *continue sur* $[a,b]$ *avec* $a \leq b$.

1. *Montrer qu'il existe* $c \in [a,b]$ *tel que :*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

2. *Montrer que l'on peut trouver* $c \in]a,b[$ *vérifiant la condition ci-dessus.*

Exercice 10.
Soit f *une fonction réelle continue sur* $[a,b]$. *Montrer que si :*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$$

alors f *garde un signe constant sur* $[a,b]$.

Exercice 11.
Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$.
2. $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}$.
4. $u_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+(\frac{k}{n})^2\right)}$.

Exercice 12.
Soit f *continue par sur* $[a,b]$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note :*
$u_n = \int_a^b f(x)\sin nx dx$ *et* $v_n = \int_a^b f(x)\cos nx dx$. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 13.
Soient f *et* g *continues sur* $[a,b]$ *vers* $\mathbb{R}$. *Montrer que :*

1. $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
2. $\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
3. *Que deviennent ces résultats si* f *et* g *sont à valeurs complexes.*

Exercice 14.
Calculer les primitives suivantes :

1. $\int (2ix^2+3x+3i-5)dx$.
2. $\int (x-i)\sqrt{x}dx$.
3. $\int \frac{(ix-1)^2}{\sqrt{x}}dx$.
4. $\int \frac{x+3i}{x+1}dx$.
5. $\int x\sqrt{1+x}dx$.
6. $\int x^2e^{4ix}dx$.
7. $\int x^2\ln x dx$.

Exercice 15.
Calculer :

1. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$, *on posera* $x = 2\sin^2 u$.
2. $\int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}dx$, *on posera* $x^2 = \cos u$.
3. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$, *on posera* $x = \cos u$.

Exercice 16.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$. On définit la fonction F par :

$$\forall x \in \mathbb{R}; F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x).$$

Donner une interprétation géométrique du résultat.

1. *Vérifier que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée F'.*
3. *Que peut-on déduire.*

Exercice 17.
Étudier la fonction :

$$F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$

Exercice 18.
Pour tout $x>0$, on définit :

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t^2}} dt.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln(3)$.

Exercice 19.
Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur $[0,1]$. On définit la fonction F sur $[0,1]$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)dt.$$

1. *Montrer que F est de classe C^2 sur $[0,1]$.*
2. *Calculer F" et en déduire que :*

$$\forall x \in [0,1]; F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)dt\right) du.$$

Exercice 20.

1. *Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ telles que :*

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2.$$

2. *Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt.$$

Exercice 21.
Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes.

1. *On suppose que $\int_0^T f(x)dx = 0$, montrer que pour tout réels a et b :*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(\lambda x)dx = 0.$$

2. *En déduire que dans le cas général, on a :*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(\lambda x)dx = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)dx.$$