LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°7$

Exercice 1.
Résoudre chacune des équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y' - 3y = t^3 - 2t + 5$.
2. $(t \ln t)y' - y = \frac{-(\ln t+1)}{t}$.
3. $y' - 2ty = \sinh(t) - 2t\cosh(t)$.
4. $y' + y\sin(t) = \sin(2t)$.
5. $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$.

Exercice 2.
Résoudre chacune des équations différentielles non linéaires suivantes :

1. $y' = e^{x-2y}$.
2. $y' - xy^2 = x$.
3. $y'(\ln y + 1) = \ln x + 1$.

Exercice 3.
On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = 1 \quad (E)$$

et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

1. *Montrer que g est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que toute solution f de (E) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que g est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.*
4. *Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.*
5. *Calculer la limite de g en $+\infty$.*
6. *Étudier les variations de g.*
7. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E') suivante :*

$$y' + 2xy = 1 \quad (E')$$

Exercice 4.
On considère l'équation différentielle :

$$y' + cy = f \quad (E)$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, c un réel strictement positif et g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = e^{-cx}\int_0^x e^{ct}f(t)\,dt.$$

1. *Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*
2. *Montrer que toute solution f de (E) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

3. *Montrer que g est l'unique solution de (E) sur I vérifiant $g(0) = 0$.*
4. *Résoudre (E) sur I.*
5. *Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ au cas où $f : x \mapsto e^{-\lambda x}$.*

Exercice 5.
Résoudre chacune des équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y" - 7y' + 12y = 2t^3 + t$.
2. $y" - 6y' + 9y = (t^2 + t + 1)e^{3t}$.
3. $y" - 2y' + 5y = t\cosh(3t)$.
4. $y" + 3y' - 10y = \sin(2t)$.

Exercice 6.
Soient a, b, c trois réels, avec a non nul, on considère l'équation différentielle :

$$ax^2y" + bxy' + cy = 0 \quad (E_0).$$

1. *On pose $z(t) = y(e^t)$, montrer que y est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si z est une solution d'une équation (E_1) d'ordre 2 à coefficients constants, à déterminer.*
2. *Résoudre alors (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$.*
3. *On pose $u(t) = y(-e^t)$, montrer que y est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_-^*$ si, et seulement si u est une solution d'une équation (E_2) d'ordre 2 à coefficients constants, à déterminer.*
4. *Résoudre de même l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}_-^*$.*
5. *Résoudre l'équation $x^2y" - 4xy' + 6y = 0 \quad (E_0)$, sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}$.*
6. *Résoudre l'équation $x^2y" - xy' + y = 0 \quad (E_0)$, sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 7.
Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 8.
Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout réel x :

$$f'(x) = f(-x).$$

Exercice 9.
Résoudre, pour tout réel $p > 0$, l'équation différentielle :

$$x^2 + y^p - pxy^{p-1}y' = 0$$

Exercice 10.
On considère l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y" - xy' + y = 0 \quad (E).$$

1. *En posant $x = \sin t$, résoudre (E) sur $]-1, 1[$.*
2. *Résoudre (E) sur $]1, +\infty[$.*
3. *Résoudre (E) sur $]-\infty, -1[$.*
4. *Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 11.
Résoudre l'équation différentielle non linéaire :

$$y' - y - x\sqrt{y} = 0$$

On peut poser $z = \sqrt{y}$.

Exercice 12.
Résoudre l'équation différentielle non linéaire :

$$y' - (y - x)^2 = 0$$

On peut poser $z = y - x - 1$.

Exercice 13.
Soient a, b et c trois réels, avec a non nul. On considère l'équation différentielle :

$$ay" + by' + cy = 0 \quad (E_0).$$

On fixe f et g deux solutions de (E_0), et on pose pour tout réel t :

$$W_{f,g}(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}.$$

$W_{f,g}$ s'appelle le wronskien de l'équation (E_0).
On dira que la famille (f, g) est libre si les deux fonctions f et g ne sont pas proportionnelles, sinon on dira que cette famille est liée. Si (f, g) est libre, on dira aussi que c'est un système fondamental de solutions de (E_0).

1. *Montrer que la fonction $W_{f,g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que c'est une solution d'une équation différentielle $\mathcal{E}$ d'ordre 1 à déterminer.*
2. *Déterminer alors $W_{f,g}$.*
3. *Montrer que (f, g) est un système fondamental de solutions de (E_0) si, et seulement si la fonction $W_{f,g}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*
4. *Supposons que l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ de (E_0) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, prouver que $f : t \to e^{r_1 t}$ et $g : t \to e^{r_2 t}$ forment un système fondamental de solutions de (E_0).*
5. *Supposons que l'équation caractéristique de (E_0) possède une racine réelle double r_0, prouver que $f : t \to e^{r_0 t}$ et $g : t \to te^{r_0 t}$ forment un système fondamental de solutions de (E_0).*
6. *Supposons que l'équation caractéristique de (E_0) possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm \beta$,où α et β sont réels et $\beta > 0$, prouver que $f : t \to e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $g : t \to e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ forment un système fondamental de solutions de (E_0).*
7. *Montrer que dans chacun des trois cas précédents, si h est une solution de (E_0), alors elle s'écrit comme une combinaison linéaire de f et g.*
8. *Soient t_0, A, B trois réels et d une fonction continue sur $\mathbb{R}$, montrer que l'équation (E) : $ay" + by' + cy = d(t)$ admet une solution unique h vérifiant les conditions initiales :*

$$h(t_0) = A, \quad h'(t_0) = B.$$

Exercice 14.
On considère l'équation différentielle, dépendant d'un paramètre réel λ suivante :

$$x(1-x)y" + [\lambda - (\lambda + 2)x]y' - \lambda y = 0 \quad (E).$$

On suppose que le réel λ est non nul.

1. *En posant $z = (1 - x)$, résoudre (E) sur tout intervalle ne contenant ni 0 ni 1.*
2. *Montrer que les solutions de (E) sur $]-\infty, 1[$ sont de la forme :*

$$f : x \mapsto \frac{\alpha + \beta|x|^{1-\lambda}}{1-x}.$$

3. *Montrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme :*

$$f : x \mapsto \alpha\frac{1 - x^{1-\lambda}}{1-x}.$$

4. *Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.*
5. *Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$, au cas où $\lambda = 0$.*