LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°9$

Exercice 1.

1. *Soient* $v_1, v_2, \dots, v_d$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^d$*, montrer que :*

$$\left\|\sum_{k=1}^{d} v_k\right\|^2 \leq d\sum_{k=1}^{d} ||v_k||^2.$$

2. *Soient* $x_1, x_2, \dots, x_d$ *des réels strictement positifs tels que* $\sum_{k=1}^{d} x_k = 1$*, montrer que :* $\sum_{k=1}^{d} \frac{1}{x_k} \geq d^2$*. Étudier le cas d'égalité.*

Exercice 2.
Soient $a_1, a2, \dots, a_d, b_1, b_2, \dots, b_d, c_1, c_2, \dots, c_d$ *des réels positifs, montrer que :*

$$\sum_{k=1}^{d} a_k b_k c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{d} a_k^2 c_k\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{d} b_k^2 c_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 3.
Une famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ *de vecteurs de* $\mathbb{R}^d$ *est dite obtus-angle si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in [|1,p|]^2; \quad i \neq j \Rightarrow < v_i/v_j > < 0.$$

1. *Montrer par récurrence sur l'entier* $p \geq 2$*, que si* $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ *est obtus-angle, alors la famille* $(v_1, v_2, \dots, v_{p-1})$ *est libre.*
2. *Si* $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ *est obtus-angle, comparer* $d+1$ *et* p*.*
3. *Existe t-il une famille obtus-angle à* $d+2$ *éléments ?*
4. *Que peut-on dire d'une famille obtus-angle à* $d+1$ *éléments ?*

Exercice 4.
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *une famille de vecteurs normés de* $\mathbb{R}^d$ *vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d; \quad \sum_{k=1}^{p} < x/e_k >^2 = ||x||^2.$$

1. *Montrer que la famille* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *est orthogonale.*
2. *En déduire que* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}^d$ *et que* $p = d$*.*

Exercice 5.
On considère le sous-espace affine $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *défini par :*

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; x_1 - x_2 + x_3 = 1\}.$$

On note F *la direction de* $\mathcal{F}$*.*

1. *Déterminer une base orthonormée* $\mathcal{B}_1$ *de* F*.*
2. *Déterminer une base orthonormée* $\mathcal{B}_2$ *de* $F^{\perp}$*.*
   Que peut-on dire de la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *?*

3. *Déterminer le projeté orthogonal P du point $A = (1,1,1,1)$ sur $\mathcal{F}$, puis calculer $d(A,\mathcal{F})$.*

Exercice 6.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $p(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$; $\quad p(x) = \sum\limits_{k=1}^{r} < x/e_k > e_k$.*
2. *Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et tout réel λ : $\quad p(x + \lambda y) = p(x) + \lambda p(y)$.*

Exercice 7.
Soient H un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ et a un vecteur normal à H. Pour tout vecteur x, on note $p(x)$ la projection orthogonale de x sur H .

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$; $\quad p(x) = x - \frac{<x/a>}{||a||^2} a$.*
2. *Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la projection orthogonale d'un vecteur (x_0, y_0, z_0) sur le plan vectoriel $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z = 0$.*

Exercice 8.
Dans $\mathbb{R}^3$, on note $e_1 = (1,0,1), e_2 = (1,0,2), e_3 = (1,1,1)$.

1. *Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ à partir de la base $\mathcal{B}$.*

Exercice 9.
Déterminer la distance du point $A = (1,2,3)$ à chacune des deux droites suivantes :

1. $D_1 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$
2. $D_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad$ *avec* $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.
Dans $\mathbb{R}^2$, on dit qu'une droite D est tangente à un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R si $D \cap \mathcal{C}$ est un singleton.
Montrer que la droite D est tangente au cercle $\mathcal{C}$ si, et seulement si $d(\Omega, D) = R$.

Exercice 11.
On considère A et B deux points distincts du plan $\mathbb{R}^2$ et un réel k.

1. *Déterminer l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.*
2. *Déterminer l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $MA = kMB$.*
   Discuter suivant le signe du réel k.

Exercice 12.
Soient a, b et c trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, montrer que :

$$a \wedge (b \wedge c) + c \wedge (a \wedge b) + b \wedge (c \wedge a) = \overrightarrow{0}.$$

Exercice 13.
Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, on définit l'application $\varphi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto \varphi(x) = x \wedge a \end{array}$.

1. *Montrer que φ est linéaire.*
2. *φ est-elle injective ? bijective ?*
3. *Montrer que φ^3 et φ sont proportionnelles.*

Exercice 14.
Soit (ABC) un triangle équilatéral de côté 1, déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2$.