LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°4$

Exercice 1.
Montrer que toute fonction complexe f périodique sur $\mathbb{R}$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Exercice 2.
Calculer chacune des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3ix}}{\sqrt{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+2x+7e^{ix}}{e^{x}+e^{-x}+1}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{ix}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-i}{\sin^2 x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - i\tan 5x}{\tan x + i\tan 5x}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}+1}$.
9. $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^{2ix}-e^{2ia}}{x^2-a^2}$ *; où a est un réel non nul.*
10. $\lim\limits_{x\to 0} x^k E\left(\frac{1}{x}\right)$ *; où $k \in \{0,1,2\}$.*

Exercice 3.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes , qui est continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est constante.

Exercice 4.
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 5.
On considère une fonction f continue sur un segment $I = [a,b]$, tel que $f(I) \subset I$.
Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 6.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions f continues sur I dont l'image $f(I)$ ne contient qu'un nombre fini de points.

Exercice 7.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. *L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.*
2. *L'image par f d'un segment est un segment.*
3. *L'image par f d'une partie bornée est une partie bornée.*

4. *L'image réciproque par f d'un intervalle est un intervalle.*
   Mêmes questions en supposant que f continue et strictement monotone.

Exercice 8.
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Montrer que $\inf(f,g)$ *et* $\sup(f,g)$ *sont continues sur $[a,b]$.*

Exercice 9.

1. *Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2. *Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes vérifiant :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 10.
Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ telle que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x)$$

Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 11.
Soient f et g deux applications continues sur $I = [a,b]$. On définit une application φ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \sup_{t \in I} (f(t) + xg(t)).$$

Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I si :

$$\forall \epsilon > 0; \exists \eta > 0; \forall (x,y) \in I^2; |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

1. *Montrer que si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.*
2. *Montrer que f est uniformément continue sur I si, et seulement si Ref et Imf sont uniformément continues sur I.*
3. *La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer que si f est lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I.*
5. *La réciproque est-elle vraie ?*

Exercice 13.
Soit f une application continue et injective d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f est monotone.

Exercice 14.
Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Exercice 15.
Résoudre l'équation $chx = 2$.

Exercice 16.
Simplifier les expressions :

1. $\arccos\left(\cos \frac{-2\pi}{3}\right); \arctan\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$.
2. $\frac{ch(\ln x) + sh(\ln x)}{x}$.
3. $sh^2 x \cos^2 x + ch^2 x \sin^2 x$.
4. $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$.
5. $\ln_x(\ln_x x^{x^y})$.