LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°6$

Exercice 1.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 2x - 4y - z = 0\}$.

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer une base, puis la dimension de* F.
3. *Déterminer un sous-espace vectoriel* G *de* $\mathbb{R}^3$ *de dimension 2 tel que* $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
4. *Déterminer le sous-espace affine* $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *passant par le point* $A = (1, 2, 3)$ *et de direction* F.

Exercice 2.
Soient $u_1 = (-11, 0, 1); u_2 = (7, 1, 0); u_3 = (0, 11, 7); u_4 = (3, 2, 1); u_5 = (-3, 9, 8)$.

1. *Déterminer le rang de la famille* $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.
2. *Que peut-on déduire ?*
3. *Extraire de* $\mathcal{U}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Soient $u_1 = (-10, 7, 7, 4); u_2 = (1, 1, 18, 3); u_3 = (1, 0, 7, 1)$.

1. *Déterminer le rang de la famille* $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$.
2. *Extraire de* $\mathcal{U}$ *une famille libre maximale* $\mathcal{L}$.
3. *Compléter* $\mathcal{L}$ *en une base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer le rang de A^n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *on considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
Calculer A^n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *où* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Déterminer le rang de la matrice* A, *selon les valeurs des paramètres* a *et* b.
2. *Calculer* $\det(A)$.
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels* a *et* b *pour que la matrice* A *soit inversible.*
4. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe deux réels* a_n *et* b_n *tels que :* $A^n = a_n I_3 + b_n J$.
5. *Écrire* a_{n+1} *et* b_{n+1} *en fonction de* a_n *et* b_n.
6. *Déterminer les réels* λ *pour lesquels la matrice* $A - \lambda I_3$ *ne soit pas inversible.*
7. *Résoudre le système linéaire* $AX = (a + 2b)X$.
8. *Résoudre le système linéaire* $AX = (a - b)X$.

Exercice 7.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la matrice* M *est inversible.*
2. *Calculer son inverse* M^{-1} *en utilisant la méthode de Gauss.*

Exercice 8.

Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$.
4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 9.

Résoudre chacun des systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + ay + a^2 z + a^3 t = 0 \\ x + by + b^2 z + b^3 t = 0 \\ y + 2az + 3a^2 t = 1 \\ y + 2bz + 3b^2 t = 1 \end{cases}$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 10.

On considère la matrice diagonale $M = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et la fonction polynômiale* $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

1. *Déterminer la matrice* $P(A)$, *et vérifier qu'elle est diagonale.*
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $P(A) = 0_n$.

Exercice 11.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les réels* λ *pour lesquels la matrice* $A - \lambda I_3$ *ne soit pas inversible.*
2. *Pour chaque valeur de* λ *trouvée, résoudre le système linéaire* $AX = \lambda X$.
3. *Trouver une matrice* D *diagonale et une matrice inversible* P *dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que*

$$A = PDP^{-1}.$$

4. *Calculer* A^n, *pour tout entier naturel* n.

Exercice 12.

On admet que pour tout réel t, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = e^t$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, *on pose pour tout réel t et tout entier naturel n :*

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

avec la convention $A^0 = I_2$.

1. *Déterminer une matrice D diagonale et une matrice inversible P dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que*
$$A = PDP^{-1}.$$
2. *Calculer A^n, pour tout entier naturel n.*
3. *Déterminer les coefficients $a_n(t), b_n(t), c_n(t), d_n(t)$ de la matrice $E_n(t)$, puis calculer leurs limites respectives $a(t), b(t), c(t)$ et $d(t)$.*
   On pose $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ *: c'est ce qu'on appelle l'exponentielle de la matrice tA.*
4. *Montrer qu'il existe deux matrices Q et R de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R$.*
5. *Calculer $Q + R, 2Q + 3R, QR, RQ, Q^2$ et R^2.*
6. *Montrer que $E(t)$ est une combinaison linéaire des matrices A et I_2.*
7. *Montrer que pour tout couple (s,t) de réels : $E(s)E(t) = E(s+t) = E(t)E(s)$, puis en déduire que $E(t)$ est inversible et donner son inverse.*
8. *Montrer que l'application $t \mapsto E(t)$ de$\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est injective.*
9. *On considère le système différentiel :*
$$(S) \begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases}$$
   Soit (u,v) une solution de (S), pour tout réel t, on pose :
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$
   (a) *Exprimer $u_1(t)$ et $v_1(t)$ en fonction de $u(t)$ et $v(t)$.*
   (b) *En déduire que les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables et calculer leurs dérivées.*
   (c) *Montrer que (u,v) est une solution de (S) si, et seulement s'il existe un couple (α,β) de réels tels que, pour tout réel t, on ait :*
$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$
   (d) *Déterminer les solutions de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = 0$ et $v(0) = -1$.*

Exercice 13.

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.*
2. *Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.*
3. *Trouver une matrice D diagonale et une matrice inversible P dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que*
$$A = PDP^{-1}.$$
4. *Calculer A^n, pour tout entier naturel n.*
5. *Calculer alors u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.*

Exercice 14.
On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\left\{\begin{array}{c} u_{n+1} = u_n + 2v_n + 6w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = u_n + 2v_n + 2w_n \end{array}\right.$$

avec $u_0 = 3, v_0 = -2, w_0 = 1$. *On pose* $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer une matrice* A *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $X_{n+1} = AX_n$.
2. *Montrer que pour tout entier naturel* n, $X_n = A^n X_0$.
3. *Trouver une matrice* D *diagonale et une matrice inversible* P *dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que*
$$A = PDP^{-1}.$$
4. *Calculer* A^n, *pour tout entier naturel* n.
5. *Calculer, alors* u_n, v_n *et* w_n *en fonction de* n.

Exercice 15.
On considère trois réels a, b, c *et la matrice* $A = \begin{pmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les réels* λ *pour lesquels la matrice* $A - \lambda I_3$ *ne soit pas inversible.*
2. *Pour chaque valeur de* λ *trouvée, résoudre le système linéaire* $AX = \lambda X$.
3. *Trouver une matrice* D *diagonale et une matrice inversible* P *dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que*
$$A = PDP^{-1}.$$
4. *Calculer* A^n, *pour tout entier naturel* n.
5. *Pour quelles valeurs de* a, b *et* c *la matrice* A *est inversible ?*
   Calculer son inverse A^{-1} *dans ce cas.*

Exercice 16.
On considère le système différentiel :

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x'(t) = -x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{array}\right.$$

On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer une matrice* A *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $X'(t) = AX(t)$, *pour tout réel* t.
2. *Trouver une matrice* D *diagonale et une matrice inversible* P *dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telles que*
$$A = PDP^{-1}.$$
3. *On pose, pour tout réel* t, $Z(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$, *montrer que* $Z'(t) = DZ(t)$.
4. *Résoudre le système différentiel* $Z'(t) = DZ(t)$.
5. *Résoudre le système différentiel* (S).