INSTITUT SOCRATE
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°11$

Exercice 1.
Simplifier : $\sqrt{a+2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$
où $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$ *et* $a\geq b$.

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ *:* $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}\geq 1$.

Exercice 3.
Soient a,b,c *et* d *quatre réels vérifiant* $a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$.*Montrer que* $a=b=c=d$.

Exercice 4.
Montrer que

1. $\forall(a,b)\in\mathbb{R}_+^2;\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$
2. $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2;\sqrt{|a-b|}\geq|\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}|$

Exercice 5.

1. *Soit* $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.*Montrer que* $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$.
2. $(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$.*Montrer que* $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0\Rightarrow a=b=c=0$.

Exercice 6.
Soient $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ *et* $n\in\mathbb{N}$.*Montrer que* $(a+b\sqrt{3})^n+(a-b\sqrt{3})^n\in\mathbb{Q}$.

Exercice 7.
Soient $x\in\mathbb{R}$ *et* $n\in\mathbb{N}^*$.*Montrer que* $E(\frac{E(nx)}{n})=E(x)$.

Exercice 8.
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.*Montrer que :*

1. $a\leq b\Rightarrow E(a)\leq E(b)$.
2. $E(a)+E(b)\leq E(a+b)\leq E(a)+E(b)+1$.
3. *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}^*;\forall x\in\mathbb{R};\quad\sum\limits_{k=0}^{n-1}E(x+\frac{k}{n})=E(nx)$.

Exercice 9.

1. *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}^*;\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$
2. *En déduire la partie entière de* $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

Exercice 10.
Quelles sont les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble $A=\{\frac{1}{n}+(-1)^n/n\in\mathbb{N}^*\}$.

Exercice 11.
Soient A *et* B *deux parties non vides majorées de* $\mathbb{R}$.*On pose :*
$A+B=\{x\in\mathbb{R}/\exists(a,b)\in A\times B:x=a+b\}$.

1. *Montrer que* A,B *et* $A+B$ *admettent des bornes supérieures dans* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

Exercice 12.
Soient A *et* B *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$ *telles que :* $\forall(a,b)\in A\times B;a\leq b$.

1. *Montrer que* $\sup(A)$ *et* $\inf(B)$ *existent.*
2. *Prouver que* $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 13.
Montrer que la partie $\{r^3/r \in \mathbb{Q}\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 14.
Soient A *et* B *deux parties non vides et bornées de* $\mathbb{R}$.*On note*

$$-A = \{-x/x \in A\}$$

$$a + A = \{a + x/x \in A\}$$

$$AB = \{xy/x \in A; y \in B\}$$

1. *Montrer que* $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. *Montrer que* $\sup(a + A) = a + \sup(A)$.
3. *A t-on* $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$ *?*

Exercice 15.
Soient A *et* B *deux parties non vides et bornées de* $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que* $A \cup B$ *est non vide et bornée.*
2. *Déterminer* $\sup(A \cup B)$ *et* $\inf(A \cup B)$.

Exercice 16.
Soient a, b *deux réels strictement positifs.Les parties suivantes sont-elles bornées, si oui quelles sont leurs bornes supérieures et inférieures ?*

1. $A = \{a + bn/n \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{a + (-1)^n b/n \in \mathbb{N}\}$
3. $C = \{a + \frac{b}{n}/n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $D = \{(-1)^n a + \frac{b}{n}/n \in \mathbb{N}^*\}$