LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°16$

Exercice 1.
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

1. *Déterminer le degré du polynôme : $P(X+1)-P(X)$ en fonction du degré de P.*
2. *Montrer que l'application Δ de $\mathbb{K}_n[X]$ vers lui même définie par : $\Delta : P \mapsto P(X+1)-P(X)$ est linéaire.*
3. *Montrer que l'endomorphisme Δ est nilpotent.*

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$, factoriser le polynôme :

$$P = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \ldots + \frac{X(X+1)\ldots(X+n-1)}{n!}.$$

Exercice 3.
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}; \quad P(z) = \overline{z}.$$

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 5.
Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynômiale associée est T-périodique ; avec $T \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 6.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ de $\mathbb{C}[X]$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 7.
Trouver toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Exercice 8.
On considère le polynôme X^4+pX^2+qX+r ; avec $r \neq 0$ dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont x_1, x_2, x_3, x_4.
Calculer en fonction de p, q et r :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

puis :

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2}.$$

Exercice 9.
Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2) = 6, P'(2) = 1 \quad et \quad P"(2) = 4$$

et

$$\forall n \geq 3; \quad P^{(n)}(2) = 0.$$

Exercice 10.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $1 + X + X^2$.

Exercice 11.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X+1)^2$.

Exercice 12.
Décomposer chacun des polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^4 + X^2 + 1$.
2. $X^8 + X^4 + 1$.
3. $X^6 + 1$.

Exercice 13.
Soient P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et a un nombre complexe.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine de multiplicité 3 du polynôme :

$$Q(X) = (X-a)(P'(X) - P'(a)) - 2(P(X) - P(a)).$$

Exercice 14.
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
Montrer que $P(P(X)) - X$ divise $P(X) - X$.

Exercice 15.
Soient P, A et B trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $deg(P) \geq 1$ et $A(P(X))$ divise $B(P(X))$.
Montrer que A divise B.

Exercice 16.
Soient n et p deux entiers strictement positifs tels que $n \geq p$.

1. *Faire la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.*
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X^n - 1$ soit divisible par $X^p - 1$.*
3. *Calculer $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1)$.*

Exercice 17.
Soient n et p deux entiers strictement positifs et $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X^p - 1$ est $R = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{r_k}$
où r_k désigne le reste de la division euclidienne de k par p.

Exercice 18.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ soient en progression arithmétique.

Exercice 19.
Déterminer les polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0.$$

Exercice 20.
Décomposer chacune des fractions suivantes en éléments simples :

1. $\frac{1}{X^n - 1}$.
2. $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.
3. $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

Exercice 21.
Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions définies par :

1. $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$.
2. $\arctan x$.
3. $\frac{1}{x^2 - 2x\cos(a) + 1}$.
4. $\frac{1}{x^2 - 2xch(a) + 1}$.