LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°2$

Exercice 1.
Montrer que pour tout $n \geq 2$ *:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.
2. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 2.
Montrer que pour tout $n \geq 1$ *:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 3.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $\sum\limits_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$.

Exercice 4.
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 4 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $u_n = 3^n + 1$.

Exercice 5.
Calculer les sommations suivantes :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.
3. $\sum\limits_{0\leq 2k\leq n} C_n^{2k}$.
4. $\sum\limits_{0\leq 2k+1\leq n} C_n^{2k+1}$.
5. $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k$.
6. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.
7. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)$.
8. $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

Exercice 6.
Calculer les sommations et les produits doubles suivants :

1. $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} ij$.
2. $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} (i+j)$.
3. $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} max(i,j)$.
4. $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} min(i,j)$.
5. $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} (ni-j+1)$.
6. $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} (i+j)^2$.
7. $\prod\limits_{1\leq i,j\leq n} ij$.
8. $\prod\limits_{1\leq i,j\leq n} i^2j$.

Exercice 7.
Montrer que pour tous $m \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}^*$ *et* $r \in \mathbb{N}$, *alors :*
$m^{2r+1} + n^{2r+1}$ *est divisible par* $m+n$.