LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°14$

Exercice 1.
Donner la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
2. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
3. $u_n = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} \ln(k)\right)^a}{(n!)^b}$, *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$.
4. $u_n = \frac{4 \times 7 \times \ldots \times (3n+1)}{(3n)!}$.
5. $u_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$

Exercice 2.
Donner la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.
2. $u_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n}$.
3. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.
4. $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n+1}}$.
5. $u_n = \sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1}$.
6. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+an+b}$, *où* a *et* b *sont réels.*

Exercice 3.
Étudier la convergence, puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.
3. $\sum\limits_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
4. $\sum\limits_{n \geq 0} \ln\left(\cos \frac{a}{2^n}\right)$, *avec* $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 4.
Montrer que la série de ***Bertrand*** *:* $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$ *converge si, et seulement si*

$$a > 1 \quad ou \quad (a = 1 \quad et \quad b > 1).$$

Exercice 5.
Montrer la convergence, puis calculer la somme des deux séries $\sum\limits_{n \geq 0} x^n \cos(n\theta)$ *et* $\sum\limits_{n \geq 0} x^n \sin(n\theta)$, *où* x *et* θ *sont réels, avec* $x \in]-1, 1[$.

Exercice 6.
Donner la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$.
2. $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n}$.
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n}$.
6. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n+(-1)^n}$.

Exercice 7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

1. *Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.*
2. *Montrer que si $\sum u_n$ diverge et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée , alors $\sum v_n$ diverge.*
3. *Donner un exemple tel que $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.*

Exercice 8.
Donner la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{a^{b^n}}{b^{a^n}}$, *avec $a > 0$ et $b > 0$.*
2. $u_n = \frac{\ln(n!)}{n!}$.
3. $u_n = n! \prod\limits_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{2^k}$.
4. $u_n = \frac{1}{C_{pn}^n}$, *avec p un entier tel que $p \geq 2$.*
5. $u_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+3}\right)^n$.
6. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

Exercice 9.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante à termes positifs telle que $\sum u_n$ converge.

1. *Montrer que $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*
2. *En déduire la convergence de $\sum nu_n^2$,$\sum \frac{u_n}{1-u_n}$ et $\sum \frac{u_n^2}{1+u_n}$.*

Exercice 10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, avec $l \in \mathbb{R}_+$.

1. *Montrer que* $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.
2. *Que peut-on en déduire ?*

Exercice 11.
Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui même et a un réel positif. Étudier la nature de la série $\sum \frac{\varphi(n)}{n^a}$.

Exercice 12.
Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs (positifs) de $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} d(n)z^n$.

Exercice 13.
Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ dans chacun des cas suivants :

1. $a_n = n^{(-1)^n}$.
2. $a_n = sh(n)$.
3. $a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$.
4. $a_n = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.
5. $a_n = \frac{ch(n)}{n}$.

Exercice 14.
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Comparer R aux rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum n^\alpha a_n z^n$, *où α est un réel quelconque.*
2. $\sum a_n^2 z^n$.
3. $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$.

4. $\sum a_n z^{2n}$.
5. $\sum a_n z^{n^2}$.

Exercice 15.

1. *Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries à termes réels strictement positifs et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :*
$$\forall n \geq n_0 : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
(a)- Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
(b)- En déduire que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2. *Soit u_n le terme général d'une série à termes réels strictement positifs, supposons qu'il existe un réel β tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque $n \to +\infty$, et on considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel quelconque différent de β.*
(a)- Donner un équivalent simple de la différence $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
(b)- En appliquant la question 1, avec un choix adéquat de α, montrer que :
$\beta > 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge et $\beta < 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.
*(c)- Énoncer le résultat ainsi démontré : c'est la règle de **Raabe-Duhamel**.*
(d)- Étudier la nature des séries $\sum \frac{2\times4\times6\ldots\times(2n)}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}$ et $\sum \frac{n n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$.

3. *On traite ici le cas $\beta = 1$ dans un cas particulier.*
On considère $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs et on suppose qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
(i) $\sum v_n$ converge absolument.
(ii) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + v_n$.
(a)- Montrer que les séries $\sum \frac{v_n}{n}$ et $\sum v_n^2$ convergent.
(b)- On pose $a_n = \ln(nu_n)$, montrer que la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge.
(c)- En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \sim \frac{K}{n}$, puis donner la nature de la série $\sum u_n$.
(d)- Étudier la nature de série $\sum \left[\frac{2\times4\times6\ldots\times(2n)}{3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}\right]^2$.

Exercice 16.
Soit α un réel strictement positif, pour tout $n \geq 1$ on pose :
$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right).$$

1. *Donner le développement limité de u_n à l'ordre 2 lorsque $n \to +\infty$.*
2. *Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.*
3. *Montrer que $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge si, et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.*
4. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge absolument.*

Exercice 17.
Donner la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n \left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
2. $u_n = \left(1 - \frac{n}{\ln(n)}\right)^{-n}$.
3. $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^4+1})$.
4. $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n} + \sin n}{n^2}$.
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$, *avec $a > 0$.*