LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°12$

Exercice 1.
montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / x \in \mathbb{R}^* \right\}$ *est un groupe pour la multiplication matricielle. Est-il abélien ?*

Exercice 2.
Soient a, b *deux éléments d'un groupe* G*.Montrer que :*

$$(ab)^n = e \Rightarrow (ba)^n = e.$$

Exercice 3.
Soit G *un groupe, on note* $Aut(G)$ *l'ensemble des automorphismes de* G*.*

1. *Vérifier que* $(Aut(G), \circ)$ *est un groupe.*
2. *Soit* $a \in G$ *fixé, on définit l'application* $f_a : \left\{ \begin{array}{c} G \to G \\ x \mapsto axa^{-1} \end{array} \right.$ *, montrer que* f_a *est un automorphisme de* G*.* f_a *est dit un automorphisme intérieur de* G*.*
3. *Montrer que* $Int(G) = \{f_a / a \in G\}$ *est un sous-groupe de* $(Aut(G), \circ)$*.*
4. *Montrer que l'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} G \to Aut(G) \\ a \mapsto f_a \end{array} \right.$ *est un morphisme de groupes, et préciser* $\ker(\varphi)$*.*
5. *Déterminer* $Aut(\mathbb{Z})$ *et* $Aut(\mathbb{Q})$*.*

Exercice 4.
Soit G *un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$ *différent de* $\{0\}$*.*

1. *Justifier l'existence de* $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$*.*
2. *Si* $a > 0$*, montrer que* $G = a\mathbb{Z}$*.*
3. *Si* $a = 0$*, montrer que* G *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*
4. *Décrire alors les sous-groupes de* $(\mathbb{R}, +)$*.*

Exercice 5.
Soient H *et* K *deux sous-groupes d'un groupe* G*.*

1. *Que peut-on dire pour* $H \cap K$ *?*
2. *Montrer que* $H \cup K$ *est un sous-groupe de* G*, si, et seulement si* $H \subset K$ *ou* $K \subset H$*.*

Exercice 6.
Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$*.*

Exercice 7.
Soit G *un groupe, on pose* $Z(G) = \{x \in G / \forall a \in G \quad ax = xa\}$*.*

1. *Montrer que* $Z(G)$ *est un sous-groupe de* G*.*
2. *Montrer que* $Z(G) = G$ *si, et seulement si,* G *est abélien.*

Exercice 8.
Soit E *un ensemble non vide.*

1. *Montrer que* $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$ *est un anneau commutatif.*
2. *Est-il intègre ?*
3. *Déterminer ses éléments inversibles.*

Exercice 9.
On pose $A = \{x = a + b\sqrt{2} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. *Montrer que* A *est un anneau commutatif.*
2. *Pour* $x = a + b\sqrt{2} \in A$, *on pose* $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$.
   Montrer que $f : x \mapsto \overline{x}$ *est un isomorphisme d'anneaux.*
3. *Déterminer les éléments inversibles de* A.

Exercice 10.
Soient H *et* K *deux sous-groupes d'un groupe* G.*On considère l'application :*
$f : H \times K \to G$ *définie par* $f(h, k) = hk$.

1. *A quelle condition* f *est-elle un morphisme de groupes ?*
2. *Dans ce cas, montrer que* f *est injective si, et seulement si* $H \cap K = \{e\}$.

Exercice 11.
Soient $(G, .)$ *un groupe et* $a \in G$, *on pose* :$< a >= \{x \in G / \exists n \in \mathbb{N} : x = a^n\}$.

1. *Montrer que* $< a >$ *est un sous-groupe de* G.
2. *Montrer que* $< a >$ *est groupe commutatif.*
   $< a >$ *est appelé le sous-groupe de* G *engendré par* a.
3. *Montrer que si* f *est un endomorphisme de* G,*alors* $f(< a >) =< f(a) >$.

Exercice 12.
On considère $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. *Montrer que* $\mathbb{Z}[i]$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. *Montrer que* $\forall z \in \mathbb{Z}[i] : \quad |z|^2 \in \mathbb{N}$.
3. *Montrer qu'un élément* z *de* $\mathbb{Z}[i]$ *est inversible si, et seulement si* $|z| = 1$.
4. *En déduire tous les éléments inversibles de* $\mathbb{Z}[i]$.
5. *l'anneau* $\mathbb{Z}[i]$ *est-il intègre ? est-il un corps ?*

Exercice 13.
Soit A *un anneau commutatif. Un élément* x *de* A *est dit nilpotent s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x^n = 0$.

1. *Montrer que* x *est nilpotent, alors* $1 - x$ *et* $1 + x$ *sont inversibles.*
2. *Montrer que si* x *et* y *sont nilpotents alors* xy *et* $x + y$ *sont aussi nilpotents.*
3. *Quels sont les éléments nilpotents d'un anneau intègre ?*
4. *Quels sont les éléments nilpotents de l'anneau* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *?*

Exercice 14.
Soit G *un groupe d'élément neutre* e. *On dit qu'un élément* x *de* G *est d'ordre* $n \in \mathbb{N}^*$ *si* $x^n = e$ *et* $x^k \neq e$ *pour tout* $k \in [|1, n-1|]$. *Si un tel entier* n *existe, on dit que* x *est d'ordre fini et on écrit* $O(x) = n$, *et si non on dit que* x *est d'ordre infini.*
On note H *l'ensemble des éléments de* G *qui sont d'ordre fini.*

1. *Vérifier que* e *est le seul élément d'ordre 1 de* G, *puis comparer* $O(x)$ *et* $O(x^{-1})$.
2. *Si* G *est abélien, montrer que* H *est un sous-groupe de* G.
3. *Montrer que* $GL_2(\mathbb{R})$ *contient des éléments d'ordre 2 et d'autres d'ordre infini.*
4. *Déterminer* H *dans les cas* $G = \mathbb{R}$ *ou* $G = \mathcal{P}(E)$ *muni de la différence symétrique* $\triangle$.
5. *Soient* $x \in G$ *d'ordre* n *et* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $x^k = e$, *montrer que* n *divise* k.
   Soit f *un morphisme de groupes de* G *vers un autre groupe* G', *et* x *un élément de* G *d'ordre fini égal à* n.
6. *Montrer que* $f(x)$ *est d'ordre fini inférieur ou égal à* n.
7. *Si* f *est injectif, montrer que* $f(x)$ *est aussi d'ordre* n.
8. *Soient* x *et* y *deux éléments de* G *d'ordres respectifs* n *et* m *tels que* $xy = yx$. *Prouver que si* m *et* n *sont premiers entre eux, alors* $O(xy) = mn$.
9. *Soit* $x \in G$ *d'ordre* n, *quel est l'ordre de* x^2 *?*
10. *Déterminer les ordres de tous les éléments de* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.