LYCEE REDA SLAOUI
CLASSES PREPARATOIRES
Agadir

Série d'exercices $n°13$

Exercice 1.
Le produit de deux suites réelles minorées est-elle une suite minorée ?.

Exercice 2.
Montrer qu'une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

Exercice 3.
Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite extraite d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Montrer que toute suite extraite de* $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Exercice 4.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :*

$$(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}\,;(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}\,;(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}\,;(u_{3.2^n})_{n\in\mathbb{N}}\,;(u_{3.2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}\,;(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}\,;(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Exercice 5.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*
$u_n = 0$ *si* n *est pair.*
$u_n = 1$ *si* n *est impair.*
Montrer que cette suite admet une infinité de sous-suites convergentes.

Exercice 6.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On pose :*

$$\forall n\in\mathbb{N};\quad v_n = \frac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{n+1}.$$

1. *Montrer que si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone, alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone.*
2. *Montrer que si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un réel* l*, alors* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l*.*

Exercice 7.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites qui convergent respectivement vers* l *et* l'*.*
Montrer que les suites de termes généraux $\inf\{u_n,v_n\}$ *et* $\sup\{u_n,v_n\}$ *sont convergentes.*

Exercice 8.
Étudier les limites des suites définies par :

1. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$.
2. $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ *; où* $a>0$ *et* $b>0$.
3. $u_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}$.
4. $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$.

Exercice 9.
A l'aide d'un encadrement adéquat, montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

Exercice 10.
Montrer que la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad et \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

est convergente.

Exercice 11.
Étudier les suites complexes définies par :

1. $u_n = \frac{n^3 i^n}{n^4+2}$.
2. $u_n = \frac{n^2}{n^2+i} - \frac{ni+1}{3n+i}$.
3. $u_n = \frac{4n^3+5in-i+3}{(in+2)(n^2-2i)}$.

Exercice 12.
Que peut-on dire d'une suite réelle croissante admettant une sous-suite convergente ? D'une suite réelle croissante admettant une sous-suite majorée ?

Exercice 13.
Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. *En déduire le comportement de la suite de terme général :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 14.
Montrer qu'une suite réelle non majorée admet suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 15.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle dont tous les termes sont des entiers relatifs.*
Montrer que si cette suite converge, alors elle est stationnaire.

Exercice 16.
On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *simultanément récurrentes définies par* $u_0 > 0; v_0 > 0$ *et les relations suivantes :*

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad et \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite.

Exercice 17.
On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante et convergente vers 0, et on pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k.$$

1. *Vérifier que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est positive.*
2. *Montrer que les suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes.*
3. *En déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et donner un encadrement adéquat de sa limite.*
4. *Étudier* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans chacun des cas suivants :*
   (a) $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.
   (b) $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+2)}$.
   (c) $u_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \exp\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)$.

Exercice 18.
Donner un équivalent simple des suivantes lorsque $n \to +\infty$ *:*

1. C_{n+r}^{r}, *avec* $r \in \mathbb{N}$.
2. $\left(\ln(1 + e^{-n^2})\right)^{\frac{1}{n}}$.

3. $\left(\frac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n$.
4. $((n+1)(n+2)\dots(2n-1)(2n))^{\frac{1}{n}}$.
5. $\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
6. $\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}-(n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}$.

Exercice 19.

Soient $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang. Posons $x_n = Re(z_n); y_n = Im(z_n)$ et $x'_n = Re(z'_n); y'_n = Im(z'_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que si $x_n \sim x'_n$ et $y_n \sim y'_n$ alors $z_n \sim z'_n$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{z_n - z'_n}{z_n} = 0$.*
2. *La réciproque est-elle vraie ?*

Exercice 20.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale dite de Wallis par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

1. *Montrer que pour $n \geq 2$: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.*
2. *Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$.*
3. *Montrer que $I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$.*
4. *En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.*

Exercice 21.

Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k! \sim n!$.