# Limites et continuité

## 1 Fonctions réelles :

### 1.1 Limites :

Dans cette section $f$ est une fonction réelle définie au voisinage du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Proposition :**
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $l > m$, alors $f$ est minorée au voisinage de $a$ par le réel $m$.

**Proposition :**
Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que : $a < b$ et $f$ une fonction (réelle) croissante sur $]a, b[$ :

(i) Si $f$ est majorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{]a,b[}(f)$.

(ii) Si $f$ n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

(iii) Si $f$ est minorée, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\limits_{]a,b[}(f)$.

(iv) Si $f$ n'est pas minorée, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

**Exercice :**
Énoncer un résultat analogue si $f$ est décroissante sur $]a, b[$.

**Proposition :**
Soient $f$ est fonction réelle définie dans un voisinage $V$ du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, où $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $V$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.

### 1.2 Continuité :

**Définitions :**
On dit que :

(i) $f$ est continue en $a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(ii) $f$ est continue sur $I$ si, elle est continue en tout point de $I$.

(iii) $f$ est sur lipschitzienne $I$, s'il existe une constante réelle positive $k$ telle que, pour tout $(x, y) \in I^2$ : $\quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
En particulier si $k \in [0, 1[$, on dit que $f$ est contractante.
Notons que si $k = 0$, alors $f$ est constante sur $I$.

**Remarque :**

(i) Une fonction lipschitzienne sur $I$ est continue sur $I$.

(ii) La somme, le produit et le quotient de deux fonctions continues en $a$ (resp. sur $I$), sont des fonctions continues en $a$ (resp. sur $I$).

(iii) Soit $J$ un autre intervalle de $\mathbb{R}$. Si $g$ est continue sur $I$ à valeurs dans $J$, et si $f$ est continue sur $J$, alors $f \circ g$ est continue sur $I$.

**Proposition :Théorème des valeurs intermédiaires.**

(i) **Version 1 du T.V.I :**
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$ et $f$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que :$f(c) = 0$.

(ii) **Version 2 du T.V.I :**
Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction continue sur $I$ à valeurs réelles, $(a, b) \in I^2$ et $\lambda$ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :$\lambda = f(c)$.

(iii) **Version 3 du T.V.I :**
Si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction continue sur $I$ à valeurs réelles, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

**Exercice :**
Soit $f$ une fonction polynômiale réelle de degré impaire. Calculer les limites de $f$ en $+\infty$ et en

$-\infty$, puis en déduire que $f$ possède au moins une racine réelle.
**Proposition :**
Si $f$ est continue strictement monotone sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, alors $f$ est une bijection de $I$ sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque $f^{-1}$ est continue sur $f(I)$.
**Proposition :**
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$ et $f$ une fonction réelle continue sur le segment $[a,b]$, alors $f$ est bornée sur $[a,b]$ et y atteint ses bornes.
**Exercice :**
Soit $f$ une fonction continue $T$-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes sur $[0,T]$.
2. Montrer que si $f$ admet une limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), alors $f$ est constante.
3. En déduire que les fonctions sin et cos n'admettent pas de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

# 2 Fonctions complexes :

Dans cette section $f$ est une fonction définie d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{C}$.
On rappelle que pour tout $x \in I$ :

$$Re(f)(x) = Re(f(x)); \quad Im(f)(x) = Im(f(x)); \quad |f|(x) = |f(x)|$$

## 2.1 Limites :

**Proposition :**
(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} Re(f)(x) = Re(l) \quad et \quad \lim\limits_{x\to a} Im(f)(x) = Im(l)$.
(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \overline{f}(x) = \overline{l}$.
(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} |f|(x) = |l|$.
(iv) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f|(x) = 0$
**Remarque :**
La réciproque de $(iii)$ est fausse si $l$ est non nul, en effet :
$f : x \mapsto e^{ix}$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (ni en $-\infty$), car $Re(f) = \cos$ et $Im(f) = \sin$ n'admettent pas de limites en $+\infty$ (ni en $-\infty$).
Et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty} |f|(x) = 1$.
**Exemple d'application :**
D'après $(iv)$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{ix}}{x} = 0$.
Il en résulte que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
**Remarque :**
Tous les résultats de limites concernant les fonction réelles, on peut les appliquer à la fonction $|f|$, si $f$ est à valeurs complexes.

## 2.2 Continuité :

Soit $a \in I$.
**Définition :**
On dit que $f$ est continue en $a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
On dit que $f$ est continue sur $I$ si, elle est continue en tout point de $I$.
**Proposition :**
(i) $f$ est continue en $a$ (resp. sur $I$) $\Leftrightarrow Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en $a$ (resp. sur $I$).
(ii) $f$ est continue en $a$ (resp. sur $I$) $\Leftrightarrow \overline{f}$ est continue en $a$ (resp. sur $I$).
(iii) $f$ est continue en $a$ (resp. sur $I$) $\Rightarrow |f|$ est continue en $a$ (resp. sur $I$).
**Exemple :**
$f : x \mapsto e^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car $Re(f) = \cos$ et $Im(f) = \sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
**Remarque :**
(i) Tous les résultats de continuité concernant les fonction réelles, on peut les appliquer à la fonction $|f|$, si $f$ est à valeurs complexes.
(ii) La somme, le produit et le quotient de deux fonctions continues en $a$ (resp. sur $I$), sont des fonctions continues en $a$ (resp. sur $I$).

(iii) Soit $J$ un autre intervalle de $\mathbb{R}$. Si $g$ est continue sur $I$ à valeurs dans $J$, et si $f$ est continue sur $J$, alors $f \circ g$ est continue sur $I$.

**Exemples :**

(i) Une fonction polynômiale à coefficients complexes (resp. réels) est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Une fonction rationnelle à coefficients complexes (resp. réels) est continues sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

(iii) Si $f$ est continue sur $I$, alors $e^f$ est continue sur $I$.