Matrices à coefficients réels

Dans tout ce chapitre d, n, p et q sont des entiers naturels non nuls.

1 Systèmes linéaires :

1.1 Généralités :

Définition 1 :
On appelle système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et à coefficients réels, tout système (S) du type suivant :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des nombres réels.

(i) Le n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est appelé second membre du système.
(ii) Si $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, on dit que le système (S) est homogène où sans second membre.
(iii) On appelle solution de (S) tout p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ vérifiant les n équations de (S).
(iv) Le système (S) est dit compatible s'il admet au moins une solution. Sinon, on dit qu'il est incompatible, c'est-à-dire que son ensemble de solution est vide.

Définition 2 :
On appelle système homogène associé à (S) le système (S_0) obtenu à partir de (S) en remplaçant les b_i par 0.

Remarque :
Un système homogène (S_0) est toujours compatible, car $(0, 0, \ldots, 0)$ est une solution évidente de (S_0).

1.2 Exemples :

Exemple 1 :
Le système $(S) : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$ est incompatible, car si on fait la somme des quatre équations, on obtient une contradiction.
Par contre le système homogène associé est compatible, car $(0, 0, 0, 0)$ en est une solution.

Exemple 2 :
Le système $(S) : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ est compatible, car $(1, 2, 3)$ en est une solution.

Exemple 2 :
Le système triangulaire supérieur $(S) : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_2 - 5x_3 = 4 \\ 2x_3 = 2 \end{cases}$ est compatible, on le résoud avec la méthode de la remontée (c.à.d : du bas vers le haut).
On trouve que $(1, 1, 1)$ est son unique solution.

2 Matrices à coefficients réels :

2.1 Généralités :

Définitions :

(a) On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels, toute application A de $[|1,n|] \times [|1,p|]$ vers $\mathbb{R}$. On dit que A est de type (n,p) et on la note :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où les $a_{i,j}$ sont des réels, pour tout $(i,j) \in [|1,n|] \times [|1,p|]$.
Le premier indice i est l'indice de ligne.
Le deuxième indice j est l'indice de colonne.
Les $a_{i,i}$ sont appelés coefficients diagonaux de A.

(b) Si $n = p$, on dit que la matrice A est carrée, on la note $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$.

(c) Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est dite triangulaire supérieure si pour tout i, j dans $[|1,n|]$:

$$i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

(d) Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est dite triangulaire inférieure si pour tout i, j dans $[|1,n|]$:

$$i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

(e) Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est dite diagonale si pour tout i, j dans $[|1,n|]$:

$$i \ne j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

C'est-à-dire que A est à la fois triangulaire supérieure et inférieure.

Notations :

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.
Et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes (et n colonnes) à coefficients réels.

Exemples :

(i) La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ notée $0_{n,p}$ c'est la matrice de type (n,p) dont tous les coefficients sont nuls. En particulier, on écrit $0_n = 0_{n,n}$.

(ii) La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée I_n c'est la matrice carrée de type (n,n) dont tous les coefficients sont nuls sauf ses coefficients diagonaux qui sont égaux à 1.

2.2 Opérations sur les matrices :

Définition :

(i) Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, α et β deux réels, on définit la matrice $\alpha A + \beta B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$\alpha A + \beta B = (\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

(ii) Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$ deux matrices à coefficients réels, α et β deux nombres réels, on définit le produit $A \times B$ de A par B, noté aussi AB par : $AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le q}}$, où $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$, pour tous $i \in [|1,n|]$ et $j \in [|1,q|]$.
Notons que ce produit est défini seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors : $AB = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ et $BA = (x_j y_i)_{1\leq i,j\leq n}$.

Remarque :

(i) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $AI_n = I_n A = A$.

(ii) Le produit matriciel n'est pas commutatif : voir l'exemple précédent.

(iii) Attention, le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune de ces deux matrices ne soit nulle.

On peut prendre : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soient A, B et C trois matrices de types respectifs (n, p) , (p, q) et (q, r), alors :

$$(AB)C = A(BC).$$

Le produit matriciel est donc associatif.

2.3 Matrices symétriques et antisymétriques :

Définition :

(i) Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle transposée de A la matrice de type (p, n) définie par :

${}^tA = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$, où $b_{i,j} = a_{j,i}$, pour tous $i \in [|1, p|]$ et $j \in [|1, n|]$.

Notons que les lines de ${}^tA$ sont les colonnes de A et vice-versa.

(ii) Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est dite symétrique si ${}^tA = A$, et elle est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Notons que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

Propriétés :

(i) Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, α et β deux nombres réels, on a :

$${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\,{}^tA + \beta\,{}^tB.$$

Ainsi, si A et B sont symétriques (resp. antisymétriques), alors $\alpha A + \beta B$ est symétrique (resp. antisymétrique).

(ii) Si A est de type (n, p) et B est de type (p, q), alors :

$${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA.$$

Exercice :

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe un couple unique de matrices (B, C), B symétrique et C antisymétrique telles que $A = B + C$.
2. Donner B et C au cas où A est symétrique.
3. Donner B et C au cas où A est antisymétrique.
4. Donner B et C, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 13 \\ -2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2.4 Matrices carrées inversibles :

Définition :

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. Une telle matrice B est unique, on l'appelle inverse de A et on la note A^{-1}.

Remarque :

(i) Supposons l'existence de B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$, alors : $B = B.I_n = B(AC) = (BA)C = I_n.C = C$.

D'où l'unicité de l'inverse.

(ii) Notons que I_n est inversible et elle est égal à son propre inverse.

(iii) Une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est inversible si, et seulement si les réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls, et dans ce cas : $D^{-1} = diag(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_2$.
2. Montrer que si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et donner son inverse A^{-1}.
3. Montrer que la réciproque de la question précédente est vraie et que :
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
4. Calculer les inverses des matrices suivantes, si c'est possible :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad et \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$
où $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriétés :

Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors AB et ${}^tA$ sont inversibles et on a :

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(ii) $({}^tA)^{-1} ={}^t (A^{-1})$.

Question :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $(A_1.A_2\ldots A_n)^{-1}$, ${}^t(A_1.A_2\ldots A_n)$ et $({}^t(A_1.A_2\ldots A_n))^{-1}$.

Exercice :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est semblable à B s'il existe une matrice inversible P telle que $B = PAP^{-1}$.

1. Montrer qu'on a définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si A est semblable à B, alors ${}^tA$ est semblable à ${}^tB$.
3. Déterminer la classe d'équivalence de la matrice I_n.

2.5 Inversion d'une matrice par l'algorithme de Gauss-Jordan :

Calculons l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, en utilisant les opérations élémentaires sur les linges des matrices A et I_3 :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$L_1 \leftarrow L_1; L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1; L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$L_1 \leftarrow L_1; L_2 \leftarrow L_2; L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

$L_3 \leftarrow L_3; L_2 \leftarrow 8L_2 - L_3; L_1 \leftarrow 8L_1 - L_3$:

$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 10 & -12 & -12 \\ -6 & 18 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

$L_3 \leftarrow L_3; L_2 \leftarrow L_2; L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$:

$\begin{pmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} 36 & -12 & -12 \\ -6 & 18 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

$L_1 \leftarrow \frac{L_1}{48}; L_2 \leftarrow \frac{L_2}{24}; L_3 \leftarrow \frac{L_3}{8}$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.6 Matrices échelonnées-Systèmes échelonnés :

Définition : Écriture matricielle d'un système linéaire.

On considère le système linéaire :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

(i) La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée matrice du système (S), la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est dite second membre de (S), et la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est dite vecteur colonne des inconnues.

Notons que : $(S) \Leftrightarrow AX = B$: c'est l'écriture matricielle de (S).

(ii) La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est dite échelonnée ou en échelons s'il existe un entier naturel r compris entre 1 et $min(n,p)$ et une suite $j_1, j_2, \ldots, j_r$ d'entiers telle que $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le p$ vérifiant :

- Pour $1 \le i \le r$: $a_{i,j_i} \neq 0$.
- Pour $1 \le i \le r$ et $1 \le j \le j_i - 1$: $a_{i,j} = 0$.
  C'est-à-dire que les a_{i,j_i} sont les premiers coefficients non nuls des r premières lignes, on les appelle pivots. Notons qu'il n'y a qu'un seul pivot par ligne.
- Pour $r+1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$: $a_{i,j} = 0$.
  C'est-à-dire que les $n - r$ dernières linges de A sont nulles.

(iii) Le système linéaire $(S) : AX = B$ est dit échelonné si sa matrice A est échelonnée.
L'entier r est appelé rang du système (S). Les inconnues $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ sont dites inconnues principales, et les autres sont dites des inconnues secondaires.
Les a_{i,j_i} avec $1 \le i \le r$, sont les pivots de (S).

Exemple :

Le système linéaire : $(S) : \begin{cases} 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 + 5x_6 = 3 \\ -2x_3 + x_4 + 4x_5 - 8x_6 = 2 \\ -3x_4 + 9x_6 = 3 \\ 0 = a \\ 0 = b \end{cases}$ est échelonné de rang $r = 3$, car sa matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée.

Les inconnues principales sont x_2, x_3 et x_4.
Les inconnues secondaires sont x_1, x_5 et x_6.
Les pivots 6, -2 et -3.

Remarques :

(i) Si $r = n$, alors (S) est compatible.

(ii) Si $r < n$, les $n - r$ dernières équations ont leurs premiers membres nuls.
Donc (S) est compatible si, et seulement si, $b_{r+1} = b_{r+2} = \ldots = b_n = 0$.

Dans ce cas, on fait passer les inconnues secondaires dans le second membre et on les considère comme des paramètres ($p-r$ paramètres), et on résoud le système triangulaire obtenu par la méthode de la remontée.

(iii) Si $p=r$, la solution quand elle existe est unique.

(iv) Si $n=p=r$, le système (S) est dit de Cramer, il possède une solution unique.

(v) L'ensemble de solutions de (S), qu'on notera $\mathcal{S}$, peut être vide, un singleton ou infini.

2.7 Méthode de Gauss :

Définition :

Deux systèmes linéaires sont dits équivalents s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

Principe de la méthode de Gauss :

La méthode de Gauss consiste à transformer un système linéaire (S) en un système linéaire équivalent échelonné (donc facile à résoudre), en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes de (S) :

(i) Permuter les deux lignes L_i et L_j, on note : $L_i \leftrightarrow L_j$.

(ii) Multiplier la ligne L_i par un réel λ non nul, on note : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

(iii) Ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j, on note : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Exercice :

On considère le système linéaire : $(S) : \left\{\begin{array}{c} x+2y+2x_4-z+t=1 \\ x+3y+z-t=1 \\ -x+y+7z+2t=1 \\ 2x+y-8z+t=a \end{array}\right.$

1. Montrer que
2. (S) est compatible si, et seulement si $a=\frac{4}{9}$.
3. Résoudre (S).

3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$:

3.1 Familles libres-Familles liées de $\mathbb{R}^d$:

3.2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$:

3.3 Bases d'un sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$:

4 Rang :

5 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^d$: